

PREGUNTAS

de la

Olimpiada Nacional de Astronomía en México

J. Eduardo Mendoza Torres

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica



Tonantzintla, Puebla
2008

© Preguntas de la Olimpiada Nacional de Astronomía en México
© Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica
Segunda edición corregida y aumentada 2008.

Edición:

J. Eduardo Mendoza Torres

Revisión:

José Paredes Jaramillo

Roberto Romano Rivera

Mónica Rodríguez Guillén

This book was typeset in \LaTeX by José Paredes Jaramillo

All rights reserved

Printed and made in México

Prohibida la reproducción total o parcial con fines de lucro

PRÓLOGO

En este libro presentamos preguntas y ejercicios, con sus soluciones, de las pruebas de las tres Olimpiadas de Astronomía que se han realizado hasta ahora en México. También, al final de cada capítulo, presentamos algunas preguntas y ejercicios propuestos para que el lector intente resolverlos.

Participantes de las olimpiadas nos han pedido ejemplos de las preguntas y ejercicios que se han planteado en las olimpiadas anteriores. Así, la idea de hacer esta serie de preguntas y ejercicios es proporcionar ese material a los posibles participantes de futuras olimpiadas. Las definiciones se denotan en negritas y dichas definiciones se encuentran en el glosario. Las unidades se escriben en cursivas. Al final hay un apéndice con diversas constantes de utilidad para los ejercicios.

En 2002 se llevó a cabo la Primera Olimpiada de Astronomía en México organizada por el Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE). Participaron más de 150 jóvenes, de 21 entidades federativas del país, adscritos a licenciaturas e ingenierías afines a Física. La primera prueba, se llevó a cabo en septiembre, a través de internet. De ella se seleccionaron veinte participantes que en noviembre estuvieron en el INAOE, Tonantzintla, Puebla, para presentar la prueba final.

Los finalistas fueron de las siguientes instituciones: Instituto Tecnológico de la Laguna (de Coahuila), Universidad de Sonora (UNISON), Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán (de Jalisco), Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente (ITESO) de Jalisco, Universidad Autónoma de Guadalajara (UAG) de Jalisco, Universidad de Guanajuato (UG), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) y Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

En tercer lugar quedaron Edah Antonio Gutiérrez Reyes, de la Facultad de Ciencias de la UNAM y Miguel Alcaraz Gutiérrez, del ITESO; el segundo lugar lo obtuvieron Christa Alejandra Amezcua Eccius, de la UAG y Roberto José Galván Madrid, de la UANL. El primer lugar fue para David de Jesús Medellín Salas, de la UANL.

En 2004 se llevó a cabo la Segunda Olimpiada de Astronomía. En dicha edición hubo dos categorías, la primera correspondió a estudiantes de nivel medio superior y la segunda a estudiantes de nivel superior. En total fueron más de doscientos participantes de diversos lugares de la república mexicana.

En la primera categoría quedó en tercer lugar José Ricardo Santillán Díaz, estudiante del Centro Cultural Jalil Gibran de Puebla, Pue. En segundo lugar

quedó Luis Alberto Sánchez Moreno, del Instituto de Humanidades y Ciencias de Guadalajara, de Guadalajara, Jal. En primer lugar quedó Armando Ortiz González, del Instituto Real de San Luis de San Luis Potosí, SLP.

En la segunda categoría quedaron en tercer lugar Iraís Rubalcava García, estudiante de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la BUAP y Cristina Romero Cañizales, estudiante de la Facultad de Ciencias de la UNAM. El segundo lugar lo obtuvo Alejandra Judith Gutiérrez Esparza, estudiante de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la UNL y en primer lugar quedó Marco Aurelio Cartas Ayala, de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

La Tercera Olimpiada se llevó a cabo en el 2007, en ella participaron casi trescientos estudiantes de veinticinco entidades federativas del país.

Los ganadores de la Primera Categoría fueron Jessica Lizbeth Gómez Hernández, de la Secundaria y Preparatoria femenil “Colinas de San Javier” de Guadalajara Jalisco, Luis Antonio Osorio Landa, de la preparatoria del Tecnológico de Monterrey Campus Ciudad de México, del Distrito Federal y Carlos Mauricio Villegas Burgos, de la secundaria Tomas Alva Edison del Distrito Federal.

Los ganadores de la Segunda Categoría fueron Jonnathan Reyes Pérez, del Instituto Politécnico Nacional, Bruno Villasenor Álvares, de la Facultad de Ciencias de la UNAM y Hector Francisco Valdovinos Uribe, del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Guadalajara, Jalisco.

Quisiera agradecer la colaboración de José Paredes, Roberto Romano y Mónica Rodríguez en la revisión de los problemas. También quiero agradecer, por colaborar en el planteamiento de las preguntas y ejercicios o por aportar ideas para éstos, a Soledad del Río, José Ramón Valdés, Olga Vega, Nelson Vera, Fidel Gutiérrez, Serguei Silich, Alejandro Palma, César Álvarez, Raúl Mujica y Pablo Barrera.

Para la realización de las pruebas y de las actividades de las olimpiadas se requirió mucho trabajo en diversas tareas y quisiera agradecer, por colaborar en ellas a Alberto Carramiñana, Roberto Murphy, Elsa Recillas, Emmanuel Méndez, Elías Brinks, Ivanio Puerari, Nikolai Silantiev, Victor Migenes, César Arteaga, Ary Rodríguez, Omar López, Eugenio Ledezma, Rosario Sánchez, Gabriela López, Héctor López, Perla García, Lino Rodríguez, Miguel Velázquez, Ana María León, Carlos Escamilla, Francisco Ramos, Abelardo Mercado, Gorgonio Cerón, Juan Montes, Raquel Iztmóyotl, Nelly Gallegos, Pedro Técuatl, Christopher Añorve, Miguel Alcaraz, Izbeth Hernández, Martha Bello, Gustavo Martínez, Jesús López, Miguel Trinidad, Cristina Romero, Mónica Sánchez, Mónica Maldonado, Abraham Luna, Silvia Hernández, Fabiola Tecanhuey, Saula Tecpanécatl, Carmen Meza, Marina Campos, Lizbeth Pensado, Laura Gómez, Jorge Cielo, Marisela Reza, Erika

Técuatl, Gema Quintero, Juana Morales, Ayko Ortega, así como a las autoridades del INAOE, en particular a José Guichard, a Francisco Soto, a Elsa Resillas y a Alberto Carramiñana, por su apoyo para la realización de las olimpiadas.

Eduardo Mendoza Torres

Índice general

1. Astronomía observacional	1
1.1. El color de la atmósfera terrestre	1
1.2. Estrellas que se ven en invierno y en verano	2
1.3. Sólo vemos una cara de la Luna	4
1.4. Calor a mediodía	5
1.5. Cielo sin atmósfera	6
1.6. Diámetro terrestre observado desde la Luna	6
1.7. Medición del radio terrestre por Eratóstenes	7
1.8. Barco a lo lejos y cálculo del radio terrestre	9
1.9. Radios solar y lunar y los eclipses de Sol	10
1.10. Distancia entre dos estrellas	11
1.11. Rotación de la Luna alrededor de la Tierra	12
1.12. Tránsito de Venus y cálculo de $1 UA$	14
1.13. Diámetro de Saturno y su distancia al Sol	15
1.14. Diámetro de la Luna	16
1.15. Júpiter visto desde su satélite Io	17
1.16. El Sol observado desde Plutón	17
1.17. Castillo de Chichén Itzá	19
1.18. Altura del volcán Mauna Kea	21
1.19. Posición de una persona en un edificio	23
1.20. Trayectoria del Sol en el mes de octubre	25
1.21. Causa de las estaciones del año	26
1.22. Distancia a Venus	26
1.23. Duración del tránsito de Venus	26
1.24. Estrellas en culminación	27
2. Planeta Tierra	29
2.1. Escala de placa	29
2.2. Espejos y antenas parabólicos	31

2.3.	Resolución angular del ojo humano	32
2.4.	Proyectil horizontal	34
2.5.	Oxígeno y vapor de agua en montañas altas	34
2.6.	Diámetro de la Tierra	37
2.7.	Equilibrio entre la Tierra y la Luna	39
2.8.	Ingravidez y valor de g a una altura h	40
2.9.	Frío en el polo sur	41
2.10.	Eclipse de Luna y de Sol	42
2.11.	Eclipse de Luna	43
2.12.	Luna llena	43
2.13.	Eclipses de Sol	43
2.14.	Observatorio Mauna Kea	43
3.	Sistema solar	45
3.1.	Cálculo de la masa de la Tierra usando caída libre	45
3.2.	Peso de un objeto en Marte	46
3.3.	Rotación solar	47
3.4.	Pérdida de masa del Sol	48
3.5.	Cálculo de la masa del Sol	49
3.6.	Movimiento de Io	49
3.7.	Movimiento de la Tierra y Júpiter	51
3.8.	Área que recorre Plutón alrededor del Sol	52
3.9.	Perímetro de los planetas y algunos cometas	54
3.10.	Velocidad de rotación	56
3.11.	¿Por qué el Ecuador?	57
3.12.	La Tierra y nuestro peso	57
3.13.	¿Por qué Mercurio sólo se ve al atardecer o al amanecer?	57
3.14.	Órbita de Júpiter alrededor del Sol	58
4.	Mecánica celeste	59
4.1.	Satélite estacionario	59
4.2.	Estación espacial como ciudad	60
4.3.	Período de un cometa y su distancia al Sol	60
4.4.	Caída de meteoritos a la Tierra	61
4.5.	Distancias mínima y máxima en una órbita elíptica	64
4.6.	Asteroide en disco de polvo	66
4.7.	Cálculo de las masas de un sistema binario	68
4.8.	Período de rotación del telescopio Hubble	69

4.9. Velocidad angular de Júpiter	71
4.10. Astronauta en la superficie de la Luna	73
4.11. Velocidad de escape para Marte	74
4.12. Cometa Halley	76
4.13. Efecto de gravedad en un asteroide	79
4.14. Período de rotación del satélite Io	80
4.15. Distancia del cometa Halley al Sol	80
4.16. Caída de objetos a la Tierra y la masa de la Tierra	80
5. Luminosidad, flujo y magnitud	81
5.1. Luminosidad de las estrellas	81
5.2. Definición de magnitud aparente de Pogson	83
5.3. Magnitud aparente de un foco	86
5.4. Estrellas binarias eclipsantes y su luminosidad	87
5.5. Magnitud aparente de una estrella	91
5.6. Magnitud de un grupo de estrellas	91
5.7. Distancia a Antares a partir de su magnitud absoluta	93
5.8. Distancia a Sirio a partir de su temperatura efectiva	94
5.9. Magnitud aparente y absoluta de Neptuno	95
5.10. Radiación térmica de los planetas	97
5.11. Magnitud de una estrella dividida en dos partes	99
6. Física estelar	101
6.1. Parámetros físicos de una estrella	101
6.2. Colapso a estrella de neutrones	103
6.3. Velocidad de giro de un pulsar	105
6.4. Energía emitida por el Sol	106
6.5. Constante solar	107
6.6. Explosión de una estrella	108
6.7. Luminosidad de una estrella	110
6.8. Transferencia radiativa	112
6.9. Estrella de neutrones	113
6.10. Frecuencia del X-ógeno	115
6.11. Velocidad de expansión de remanente de supernova	117
6.12. Ionización de gas por luz ultravioleta	118
6.13. Masa de una galaxia	120
6.14. Curva de rotación de la Vía Láctea	122
6.15. Betelgeuse y Rigel	125
6.16. Presión en el centro de una estrella	125

A.	127
A.1. Apéndice	127
A.2. Glosario	128
Índice alfabético	161

Índice de figuras

1.1. Rotación de la Tierra alrededor del Sol.	3
1.2. Cálculo del radio de la Tierra por Eratóstenes.	8
1.3. Trayectoria de un barco hasta perderse de vista.	9
1.4. Radios y las distancias en un eclipse de Sol.	11
1.5. Medición de la distancia entre dos estrellas.	11
1.6. Rotación de la Luna alrededor de la Tierra.	13
1.7. Posición aparente de la Luna y el Sol observados desde la Tierra.	16
1.8. Ángulo que subtiende Júpiter visto desde su satélite Io.	17
1.9. Ángulo que subtiende el Sol y una moneda, visto desde la Tierra y Plutón.	18
1.10. Declinación del Sol y latitud del Castillo de Chichén Itzá.	20
1.11. Posición de una lancha y el volcán Mauna Kea.	22
1.12. Diagrama de un edificio sobre la Tierra.	24
2.1. Parábola cuyo eje está ubicado a lo largo del eje x	31
2.2. Línea de visión de una persona hacia la playa.	37
2.3. Atracción entre la Tierra y la Luna.	39
2.4. Eclipse de Luna y de Sol.	42
3.1. Trayectoria de Io a través de la sombra de Júpiter.	50
3.2. Trayectoria de la Tierra y Júpiter alrededor del Sol.	51
3.3. Trayectoria elíptica.	53
3.4. Diagrama de una trayectoria elíptica.	55
3.5. Órbitas de Mercurio y de la Tierra.	58
4.1. Distancias mínima y máxima a un foco de la elipse.	65
4.2. Diagrama de un punto P sobre la superficie de Júpiter.	72
4.3. Trayectoria elíptica en coordenadas polares.	77
5.1. Estrellas binarias eclipsantes y su luminosidad.	88

6.1. Diagrama de velocidad angular (modelo básico).	122
6.2. Velocidad de la nube respecto del LSR. La distancia del Sol al centro de la galaxia es R_0	123
6.3. La distancia entre el Sol y la nube es $R_{or} - R_r$	126
A.1. Cambio del diámetro angular de un objeto al acercarnos a él.	143
A.2. Representación gráfica de un parsec.	143
A.3. Escala de placa.	144
A.4. Intensidad radiativa a través de una nube de gas.	144
A.5. Finalistas y organizadores de la Primera olimpiada.	145
A.6. Segunda olimpiada, INAOE, Octubre 2004.	146
A.7. Finalistas de la tercera olimpiada de astronomía.	147
A.8. Finalistas de la tercera olimpiada en el gran telescopio milimétrico.	148
A.9. Vista de los edificios 1 y 2 del INAOE, Tonantzintla, Puebla	149
A.10. Telescopios del INAOE	150
A.11. Fotomontaje hecho por Carlos Escamilla	151
A.12. La Luna tomada por Carlos Escamilla y Gustavo Escobedo	151
A.13. Galaxias el remolino tomada por Luis Rivera Terrazas	152
A.14. Galaxia espiral tomada por D. Mayya	152
A.15. Nebulosa California tomada por Guillermo Haro	153
A.16. Nebulosa de la Roseta tomada por E. Schmitter	154
A.17. Galaxia el Sombrero tomada por Enrique Chavira	155
A.18. Nebulosa de Orion tomada por E. Schmitter	155
A.19. Nebulosa el Aguila, tomada por Enrique Chavira	156
A.20. Nebulosa Keyhole tomada por Enrique Chavira	157
A.21. Nebulosa ic tomada por Enrique Chavira	158
A.22. Laguna Trifida tomada por Eugenio Mendoza	159
A.23. Nebulosa del Cabeza de Caballo tomada por Guillermo Haro	159
A.24. Imagen del cometa Ikeya Seky tomada por Enrique Chavira	160
A.25. Imagen del cometa Bennett tomada por Guillermo Haro	160

Capítulo 1

Astronomía observacional

1.1. El color de la atmósfera terrestre

Las partículas de la atmósfera terrestre absorben y dispersan la luz que nos llega del Sol y de otros objetos celestes. La eficacia de los fenómenos de absorción y dispersión depende de la longitud de onda de la luz.

- a) ¿Por qué durante el día vemos al cielo azul y al Sol amarillo? Explica también por qué el Sol se ve rojizo cuando está cerca del horizonte.
- b) ¿Por qué a mediodía no podemos ver, a simple vista, ninguna **estrella**?
- c) ¿Podrá alguna estrella o algún otro objeto celeste verse, en alguna situación particular, al mediodía?

Respuestas

a) Sabemos que la luz que llega del Sol a la Tierra es dispersada por la atmósfera terrestre. La eficacia de la dispersión es mayor a longitudes de onda menores. Es decir, en el azul la eficacia es mayor que en el amarillo. Por lo tanto, las partículas de la atmósfera dispersan con mayor facilidad la luz azul del Sol. Esta luz, al ser dispersada por la atmósfera, nos llega de todas las direcciones y hace que veamos el cielo azul. Cuando el Sol está en el cenit nos llega menos luz azul y lo vemos más amarillo. Cuando el Sol está cerca del horizonte su luz tiene que recorrer una mayor distancia a través de la atmósfera y las ondas que menos se dispersan son aquellas con longitud de onda más larga (rojas). Por eso, el Sol se ve rojizo cuando está cerca del horizonte.

b) De día, las estrellas no se ven porque tienen menor brillo que el brillo de la atmósfera. Es interesante recordar que la luz que nos llega de la atmósfera en realidad proviene del Sol pero fue dispersada en todas direcciones por las partículas de la atmósfera. Si no existiera la atmósfera terrestre el cielo se vería oscuro y también podríamos ver estrellas de día.

c) Objetos celestes más “brillantes” que la atmósfera sí se puede ver de día. Por ejemplo, la Luna puede verse de día. La supernova del año 1054 que produjo la nebulosa del Cangrejo fue tan brillante que era visible de día. También, durante los eclipses totales de Sol se llegan a ver algunos planetas y estrellas.

1.2. Estrellas que se ven en invierno y en verano

- Si estando en algún lugar de México vemos el cielo a diario, aproximadamente a la misma hora, notaremos que muchas **estrellas** que aparecen en invierno no aparecen en verano. ¿Por qué?
- Otras estrellas sí se observan tanto en invierno como en verano. ¿Dónde es mayor el número de éstas últimas, en Mexicali o en Puebla?, ¿por qué?
- Explica por qué en verano el día (es decir las horas con luz) es más largo que en invierno.

Respuestas

a) La orientación del eje polar terrestre se puede considerar constante a lo largo del año. Sin embargo, dicho eje está inclinado respecto del plano de la eclíptica.

En la Figura 1.1 tenemos una representación de la posición de la Tierra respecto del Sol en las diferentes estaciones del año. La Tierra está dibujada como la vería un observador en el plano de la eclíptica. La idea de esta figura es mostrar como, debido a la inclinación de la Tierra, la luz del Sol en una época ilumina más al hemisferio norte que al sur. La posición del extremo izquierdo corresponde al solsticio de invierno y la posición derecha al solsticio de verano. La posición inferior representa al equinoccio de primavera y la superior al equinoccio de otoño. Las flechas indican la dirección del eje polar (el cual está inclinado) y las líneas curvas sobre los círculos representan a dos meridianos del hemisferio norte.

Desde el equinoccio de primavera hasta el equinoccio de otoño (es decir, durante medio año) el polo norte siempre está del lado iluminado por el Sol mientras que el polo sur está del lado oscuro. Durante el otro medio año ocurre lo contrario, el polo norte queda en el lado oscuro mientras que el polo sur queda del lado iluminado.

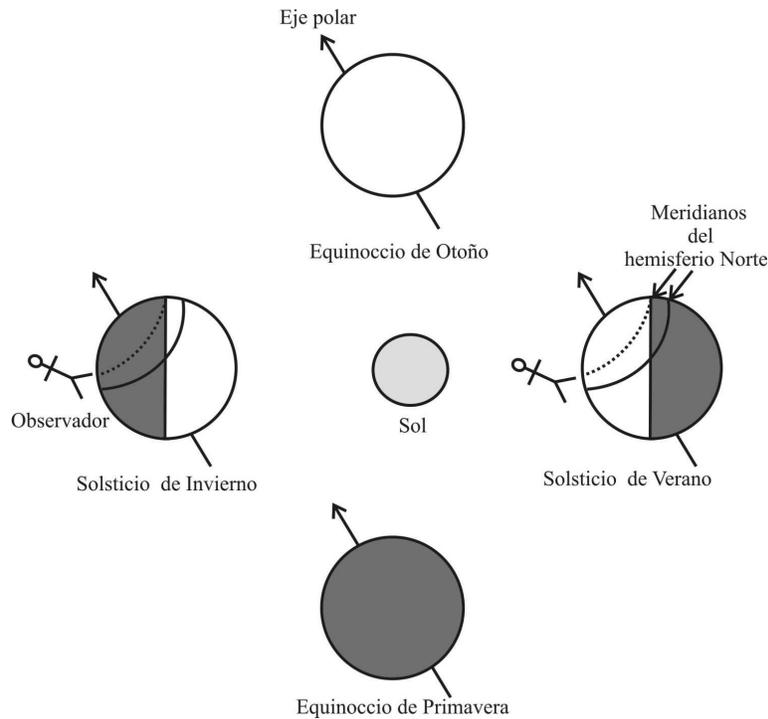


Figura 1.1: Rotación de la Tierra alrededor del Sol.

El eje de rotación de la Tierra apunta siempre a un mismo punto de la esfera celeste. Entonces, sobre el polo norte están las mismas estrellas a lo largo del año (aunque sólo se verán aproximadamente medio año). Las estrellas que están cerca del polo celeste se conocen como estrellas circumpolares. Vistas desde el polo, estas estrellas parecen seguir trayectorias circulares sobre la esfera celeste. En el polo norte y en el polo sur es en donde más estrellas circumpolares se ven.

En la Figura 1.1 se representa, con una línea curva a trazos, el paralelo correspondiente a una latitud de $90^\circ - 23.5^\circ = 66.5^\circ$, al cual se le llama círculo polar ártico. Para latitudes mayores a 66.5° la noche tarda medio año y durante el otro medio año es de día.

En latitudes entre 0° y 66.5° sí ocurren día y noche a lo largo del año. En ese caso las estrellas circumpolares del norte se ven tanto en invierno como en verano.

Como se explica en la sección 1.1, la luz del Sol ilumina la atmósfera y durante el día no se pueden ver las estrellas. Si estamos en el solsticio de verano, las estrellas que están del lado derecho no se verán, pues aparecerán de día. De manera similar,

si estamos en el solsticio de invierno, las estrellas que están del lado izquierdo no se verán, pues aparecerán de día. Sin embargo, las estrellas circumpolares se pueden ver tanto en el solsticio de verano como en el solsticio de invierno.

Entre más lejos estemos del polo norte y más cerca del ecuador vamos a ver menos estrellas circumpolares. Es decir, la cantidad de estrellas que se ven tanto en verano como en invierno disminuye.

b) Ahora, recordemos que Puebla y Mexicali están en el hemisferio norte y que Mexicali está más cerca del polo norte que Puebla. Entonces, desde Mexicali pueden verse más estrellas circumpolares que desde Puebla. Es decir, el número de estrellas que se pueden ver a lo largo del año es mayor en Mexicali que en Puebla.

c) Cuando el polo norte está dirigido hacia el Sol es verano en el hemisferio norte. Esto se debe a que, cuando la Tierra está en esa región de su órbita, dicho hemisferio queda más tiempo del lado iluminado de la Tierra. Recordemos que durante medio año (el cual incluye el verano) es de día en latitudes mayores a 66.5° . Para latitudes un poco menores, el Sol se oculta por un tiempo corto (de unas cuantas horas). Por ejemplo, a mediados de junio a una latitud de 60° el Sol se oculta (es decir ocurre la puesta de Sol) un poco después de las 11 p.m. y amanece un poco después de las 2:00 a.m. En la Figura 1.1 se representa un paralelo, en el hemisferio norte, que está más al sur que el paralelo 66.5° . Dicho paralelo, que en la Figura 1.1 es la curva más larga, representa las posiciones de una persona (en relación al Sol) durante la mitad de un día. Es decir, como si el observador se fuera moviendo sobre esa curva a lo largo de 12 horas. Podemos ver que el segmento de la curva que está del lado iluminado es más largo que el que está del lado oscuro. En otras palabras, los días son más largos en verano porque durante esa estación del año el tiempo que una persona está sobre el lado iluminado es mayor que el tiempo que está sobre el lado oscuro.

Si trazáramos otros paralelos más al sur veríamos que el segmento en la zona oscura va aumentando a medida que nos acercamos al ecuador. Es decir, el tiempo que dura la noche aumenta entre más cerca estemos del ecuador. En el ecuador el tiempo que el Sol está sobre el horizonte y el tiempo que está oculto son iguales.

1.3. Sólo vemos una cara de la Luna

Tanto la Luna como la Tierra giran alrededor de su propio eje. La Luna además, gira en una órbita casi circular alrededor de la Tierra. Sin embargo, desde la Tierra siempre se ve la misma “cara” de la Luna.

a) Di, qué condición se tiene que cumplir para que esto ocurra.

b) Describe el fenómeno que conduce a esta situación.

Respuestas

a) Vemos siempre la misma cara de la Luna porque su período de rotación sobre sí misma es igual a su período de traslación alrededor de la Tierra.

b) Como la fuerza de gravedad es un vector, depende de la distancia y del ángulo con el que se aplica. Así, el lado de la Luna más próximo a la Tierra siente una atracción gravitacional mayor a la de otras zonas. Es decir, si desde la Tierra vemos a la Luna entonces la zona que está enfrente de la Tierra siente la mayor atracción gravitacional mientras que las zonas de los lados sienten una menor atracción gravitacional (fuerza de marea). Esto hace que se produzca un alargamiento de la Luna. El mismo efecto producido por la Luna sobre la Tierra es responsable de las mareas en los océanos. La zona alargada no puede regresar instantáneamente a su forma inicial. Cuando la Luna rotaba sobre sí misma más rápido de lo que lo hace actualmente, la zona alargada se desplazaba hacia la dirección de rotación de la Luna. La zona alargada, antes de regresar a su forma inicial, ya no estaba enfrente de la Tierra. Entonces esa zona sufría una mayor atracción gravitacional. Dicha fuerza se oponía a la rotación de la Luna sobre su eje. Debido a esta oposición la velocidad de rotación de la Luna fue disminuyendo hasta llegar a la situación en la que una misma cara siempre está dirigida hacia la Tierra.

1.4. Calor a mediodía

A lo largo del año la distancia entre la Tierra y el Sol varía. Estando en la ciudad de Puebla a mediodía, ¿se siente más calor cuando la Tierra está más cerca del Sol o no? Explica por qué.

Respuesta

Debido a la posición relativa Tierra-Sol y a la inclinación del eje de rotación terrestre, en el momento en que en el hemisferio norte es verano, en el hemisferio sur es invierno. También, si en el hemisferio norte es invierno, en el hemisferio sur es verano. De esta forma, el que haga calor o frío en algún punto de la superficie terrestre no depende de si ambos cuerpos celestes están más alejados o más cercanos, sino de la inclinación del eje terrestre. Cuando la Tierra está más cerca del Sol es en el mes de enero, a una distancia de aproximadamente 147 millones de kilómetros, en el hemisferio norte es invierno y se presenta la época fría. Cuando la Tierra está más

alejada del Sol, alrededor del mes de julio, aproximadamente a 151 millones de kilómetros, estamos en verano, mientras que en el hemisferio sur se hará sentir el invierno.

1.5. Cielo sin atmósfera

¿Cómo se vería el cielo de día si la Tierra no tuviera atmósfera?

Respuesta

Si la Tierra no tuviera atmósfera, la luz solar alcanzaría nuestros ojos directamente desde el disco solar, no recibiríamos luz difundida y el cielo aparecería tan negro como por la noche (los astronautas pueden observar durante el día las estrellas, la Luna y los planetas debido a que están fuera de la atmósfera). El color negro de la noche es debido a que, a la atmósfera que rodea al observador, apenas llega luz y por tanto no se puede dar suficiente difusión.

1.6. Diámetro terrestre observado desde la Luna

El **diámetro angular** de la Luna (α), vista desde la Tierra, es de 0.5° . El **ángulo que subtiende** la Tierra, observada desde la Luna (β), es varias veces mayor.

- Sean R_T y R_L los radios terrestre y lunar. Calcula β en función de $\frac{R_T}{R_L}$.
- Encuentra el valor de β en grados.

Respuestas

- Sea r la distancia Tierra-Luna. De la geometría del problema tenemos que

$$\tan(\alpha/2) = \frac{R_L}{r} \quad y \quad \tan(\beta/2) = \frac{R_T}{r}.$$

Como $\alpha/2 \ll 1$ y $\beta/2 \ll 1$, entonces

$$\tan(\alpha/2) \cong \alpha/2 \quad y \quad \tan(\beta/2) \cong \beta/2.$$

Así tenemos que

$$\alpha/2 = \frac{R_L}{r} \quad y \quad \beta/2 = \frac{R_T}{r}.$$

Hacemos el cociente de ambas ecuaciones,

$$\frac{\beta/2}{\alpha/2} = \frac{R_T/r}{R_L/r}.$$

Simplificando y despejando tenemos:

$$\beta = \alpha \frac{R_T}{R_L} = 0.5^\circ \frac{R_T}{R_L}.$$

b) Sustituyendo R_T y R_L resulta:

$$\beta = 0.5^\circ \frac{6\,371.03}{1\,738.20} = 1.8^\circ.$$

Es decir, la Tierra vista desde la Luna tiene un diámetro angular de casi cuatro veces el diámetro que subtiende la Luna vista desde la Tierra. Lo cual seguramente produce una vista asombrosa de la Tierra.

1.7. Medición del radio terrestre por Eratóstenes

En el año 230 a.C. Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra. Se dio cuenta de que en el **solsticio** de verano en la ciudad de Siena (hoy Assuan) en Egipto, al mediodía la luz del Sol llegaba directamente al fondo de un pozo de agua. Esto significa que el Sol estaba en el **cenit** y por eso no producía sombra. Recordó que un poco más al norte, en Alejandría, también durante el solsticio de verano, la situación era diferente ya que un obelisco sí producía sombra al mediodía. Es decir, en Alejandría a la misma hora, el Sol no estaba en el cenit. Eratóstenes explicó lo anterior en un escenario en el que la Tierra es redonda y el Sol está muy lejos por lo que los rayos solares llegan paralelos entre sí. El obelisco y su sombra constituían los catetos de un triángulo y el ángulo del vértice superior de dicho triángulo era de 7.5° (Figura 1.2). Eratóstenes sabía que Alejandría se encontraba a la misma longitud que Siena y que la distancia entre estas ciudades era de 5 000 *estadios* (1 estadio = 0.158 *km*).

- a) Usando la información anterior calcula la circunferencia de la Tierra.
- b) Calcula el radio de la Tierra.
- c) Los valores aceptados actualmente son: circunferencia ecuatorial = 40 075.2 *km* y circunferencia meridional = 40 008.1 *km*. Los valores de los radios, polar y ecuatorial se dan en el Apéndice A. Compara estos valores con los que calculaste y menciona algunas causas de las diferencias.

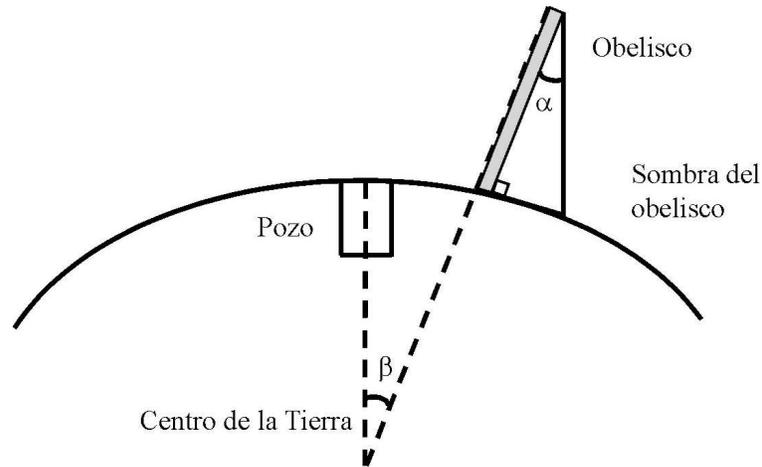


Figura 1.2: Cálculo del radio de la Tierra por Eratóstenes.

Respuestas

a) En la Figura 1.2 se ve que las líneas rectas que unen al centro de la Tierra con Siena y Alejandría forman un ángulo (β) tal que $\beta = \alpha$. Si 7.5° correspondían a 5 000 *estadios*, entonces a un grado le correspondían 667 *estadios*. Podemos estimar el tamaño de la circunferencia calculando el número de *estadios* equivalente a 360° . Esto es:

$$(360^\circ) \left(667 \frac{\text{estadios}}{1^\circ} \right) = 240\,120 \text{ estadios.}$$

Haciendo la conversión a *kilómetros* tenemos que

$$(240\,120 \text{ estadios}) \left(0.158 \frac{\text{km}}{\text{estadios}} \right) = 37\,938.96 \text{ km.}$$

Lo cual, de acuerdo a la suposición de que la Tierra es esférica, corresponde a la circunferencia de la Tierra.

b) Para calcular el radio de la Tierra partimos del hecho de que la circunferencia está dada por $c = 2\pi R$ y entonces,

$$R = \frac{c}{2\pi} = \frac{37\,938.96 \text{ km}}{2\pi} = 6\,038.17 \text{ km.} \quad (1.1)$$

c) Para la distancia entre Siena y Alejandría, se usó un valor de 5 000 *estadios* pero no conocemos la precisión de esta medida. Tampoco conocemos la precisión

con la que se midió el ángulo α . Además de estos dos factores, que producen incertidumbre en el resultado final, también está el hecho de que la Tierra no es una esfera, sino un geoide.

1.8. Barco a lo lejos y cálculo del radio terrestre

Un barco, cuyo mástil tiene una altura de 10 m , zarpa de un puerto a una velocidad de 34 km/h . Al cabo de 20 min sólo se ve la punta del mástil. Estima el radio de la Tierra.

Respuesta

Para visualizar la situación podemos representar al radio de la Tierra (R), a la altura del mástil (h) y a la distancia entre el punto de partida y la punta del mástil (l) tal y como se muestra en la Figura 1.3. A la trayectoria del barco la denotamos

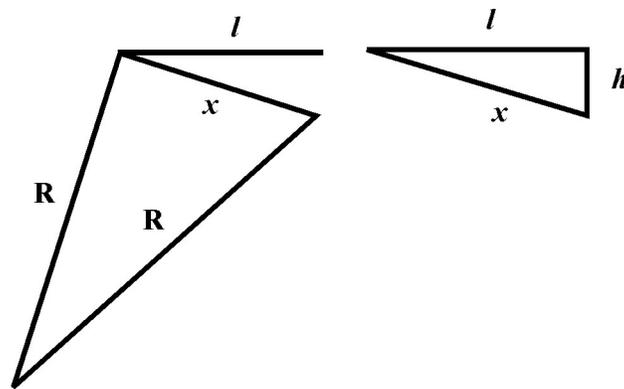


Figura 1.3: Trayectoria de un barco hasta perderse de vista.

por x . Sabemos que $v = x/t$, por lo que $x = vt$. Sustituyendo valores encontramos que $x = 11.3\text{ km}$.

De los triángulos que se forman tenemos que

$$R^2 + l^2 = (R + h)^2. \quad (1.2)$$

Desarrollamos el lado derecho de la igualdad y sustituyendo $l^2 = x^2 + 10^2$ tenemos que

$$R^2 + x^2 + 10^2 = R^2 + 20R + 10^2.$$

Lo cual conduce a que $x^2 = 20 R$ y entonces,

$$R = \frac{x^2 [km^2]}{20 [m]} \approx 6\,400 \text{ km}.$$

Este valor es muy aproximado a los considerados como válidos actualmente (ver Apéndice A).

1.9. Radios solar y lunar y los eclipses de Sol

El Sol y la Luna, observados desde la Tierra, **subtienden ángulos** muy similares. Precisamente esto es lo que permite que ocurran los **eclipses** totales de Sol. El radio promedio de la Luna es de $1\,738 \text{ km}$. La distancia entre la Tierra y el Sol es de aproximadamente $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ y la distancia entre la Tierra y la Luna es de aproximadamente $3.85 \times 10^5 \text{ km}$.

- Utilizando los datos mencionados arriba, haz una estimación del diámetro del Sol en *kilómetros*.
- Explica cuáles pueden ser las causas de la diferencia entre el radio del Sol calculado en el inciso a) y los que se dan en el Apéndice A.

Respuestas

a) En la Figura 1.4 r_L denota la distancia entre la Tierra y la Luna, R_L es el radio de la Luna, r_\odot es la distancia entre la Tierra y el Sol y R_\odot es el radio del Sol. En dicha figura, tenemos que se forman dos triángulos semejantes y, por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{R_L}{r_L} = \frac{R_\odot}{r_\odot}. \quad (1.3)$$

Por lo que

$$R_\odot = r_\odot \frac{R_L}{r_L} = 1.5 \times 10^8 \frac{1.7 \times 10^3}{3.85 \times 10^5} = 6.6 \times 10^5 \text{ km}. \quad (1.4)$$

b) La principal causa de la diferencia es que usamos los valores promedio de los ángulos subtendidos. Dichos ángulos, para el momento de un eclipse, no necesariamente son iguales a los valores promedio.

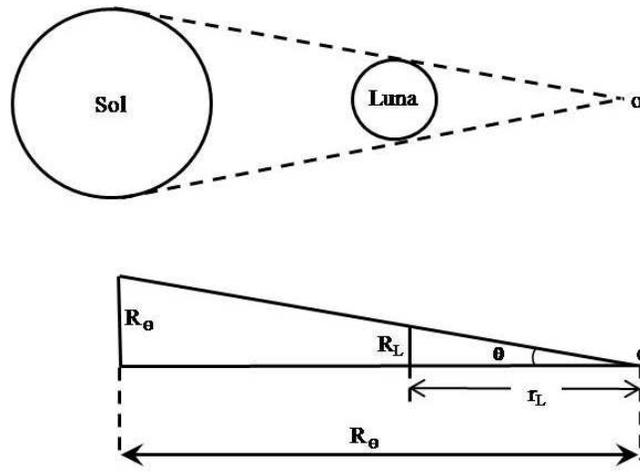


Figura 1.4: Radios y las distancias en un eclipse de Sol.

1.10. Distancia entre dos estrellas

Determina la distancia lineal entre dos **estrellas** que están a las distancias r_1 y r_2 de la Tierra y se ven en el cielo a una distancia angular θ .

Respuesta

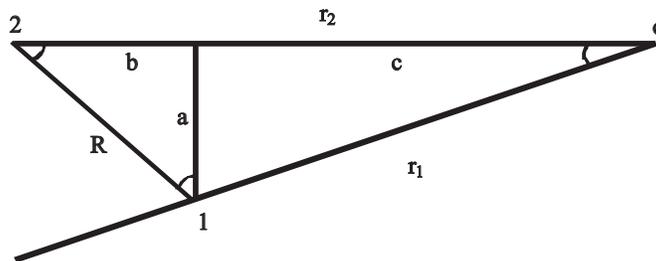


Figura 1.5: Medición de la distancia entre dos estrellas.

Con la ayuda de la Figura 1.5 y aplicando el teorema de Pitágoras resulta que

$$R^2 = a^2 + b^2. \quad (1.5)$$

Del triángulo inferior tenemos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{r_1} \quad y \quad \operatorname{cos}\theta = \frac{c}{r_1}.$$

Entonces, $a = r_1 \operatorname{sen}\theta$, y $c = r_1 \operatorname{cos}\theta$, y de la Figura 1.5 se obtiene:

$$b = r_2 - c = r_2 - r_1 \operatorname{cos}\theta. \quad (1.6)$$

Sustituyendo a y b en la ecuación (1.5) tenemos que

$$R^2 = (r_1 \operatorname{sen}\theta)^2 + (r_2 - r_1 \operatorname{cos}\theta)^2. \quad (1.7)$$

Desarrollando el binomio al cuadrado,

$$\begin{aligned} R^2 &= (r_1)^2 \operatorname{sen}^2 \theta + (r_2)^2 - 2r_1 r_2 \operatorname{cos}\theta + (r_1)^2 \operatorname{cos}^2 \theta, \\ &= (r_1)^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta) + (r_2)^2 - 2r_1 r_2 \operatorname{cos}\theta. \end{aligned}$$

Pero, como $\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$, resulta que

$$R^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1 r_2 \operatorname{cos}\theta.$$

O bien:

$$R = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1 r_2 \operatorname{cos}\theta}. \quad (1.8)$$

Esta última relación es conocida como la ley de los Cosenos. En este resultado podemos ver que, conociendo el ángulo entre dos estrellas y la distancia a cada una de ellas, desde un punto en común, podemos calcular la distancia entre ellas con sólo aplicar esta ley.

1.11. Rotación de la Luna alrededor de la Tierra

El período de giro de la Luna alrededor de la Tierra (T_L) es de 29.5 *días*. También podemos darnos cuenta de que la Luna aparece en el **horizonte este** (u *oriente*) con un retraso diario que podemos notar a simple vista.

- a) Calcula cuántos grados se mueve la Luna, en la bóveda celeste, en un día.
- b) Demuestra que la Luna aparece en el horizonte *este* con un retraso de aproximadamente 50 *minutos*, respecto al día anterior.

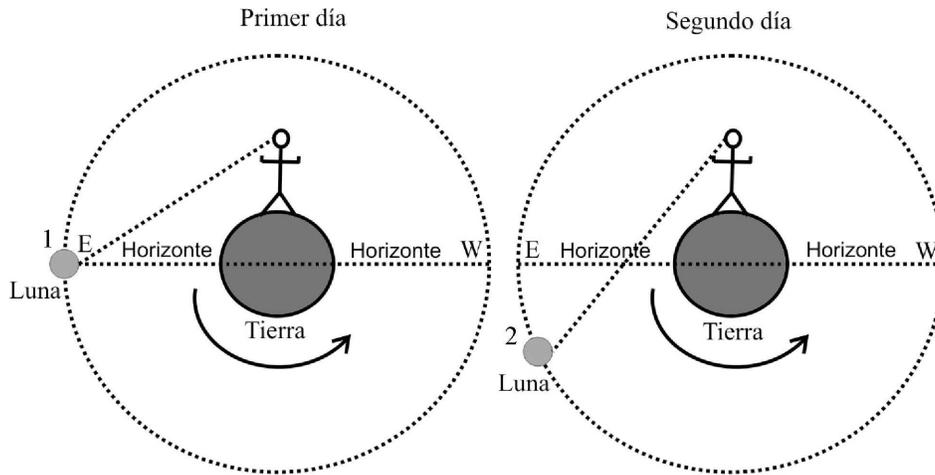


Figura 1.6: Rotación de la Luna alrededor de la Tierra.

Respuestas

a) El cociente entre el ángulo (α_d) que corresponde al movimiento de la Luna en un día es igual al cociente entre un día y el tiempo que le toma a la Luna dar una vuelta completa alrededor de la Tierra (es decir de T_L):

$$\frac{\alpha_d}{360^\circ} = \frac{1 \text{ día}}{T_L}. \quad (1.9)$$

Entonces, α_d es igual a

$$\alpha_d = \frac{360^\circ}{29.5 \text{ días}} = 12.2^\circ.$$

b) Como T_L no es muy grande en relación al período de giro de la Tierra (T_\oplus) sobre su propio eje (1 *día*), si observamos la posición de la Luna varios días seguidos a la misma hora, notaremos que no está en el mismo lugar.

La Luna gira alrededor de la Tierra en la misma dirección que la Tierra gira sobre su eje. Si vemos la Luna dos días seguidos tendremos la situación de la Figura 1.6. El primer día, la Luna estará en la posición 1 cuando, debido a la rotación de la Tierra, el observador la verá aparecer en el horizonte *este*. Para el segundo día, la Luna se habrá movido en su órbita un ángulo α_d y estará en la posición 2. Debido a eso, no aparecerá a la misma hora que el día anterior. Más bien, la Luna tendrá que recorrer un ángulo α_d extra para llegar al horizonte y, por lo tanto, aparecerá más tarde que el día anterior. El tiempo de retraso corresponde al tiempo, t_α , que le

tomará a la Luna recorrer el ángulo α_d . El cociente entre el retraso diario (t_α) y T_\oplus es igual al cociente del lado izquierdo de la ecuación (1.9), es decir,

$$\frac{t_\alpha}{T_\oplus} = \frac{\alpha_d}{360^\circ}.$$

Despejando y sustituyendo los valores resulta que el retraso respecto del día anterior es

$$t_\alpha = \frac{1 \text{ día} \times 12.2^\circ}{360^\circ} = 0.813 \text{ hrs} = 48.8 \text{ min.}$$

1.12. Tránsito de Venus y cálculo de 1 UA

Dos astrónomos observan un tránsito de Venus desde dos lugares en la Tierra situados a la misma **longitud** pero a **latitudes** de 30° norte y 30° sur. Al mediodía, los dos astrónomos miden la posición de Venus sobre el disco solar, encontrando que sus medidas difieren en 0.53 minutos de arco ($'$). Los astrónomos saben que el período orbital de Venus es de 224.7 *días*, pero desconocen las distancias entre dos objetos cualesquiera del Sistema solar.

- Muestra que a partir de la información anterior los astrónomos pueden calcular una **Unidad Astronómica** que es la distancia de la Tierra al Sol.
- ¿Qué otra información pueden obtener sobre el Sistema Solar?

Respuestas

- La distancia entre los dos astrónomos es

$$d_{obs} = 2 R_T \text{ sen}(30^\circ).$$

Cuyo valor es

$$d_{obs} = 2 R_T (0.5) = R_T = 6378 \text{ km.}$$

La posición de Venus difiere en $\theta = 0.53' = 1.54 \times 10^{-4} \text{ rad}$. Por lo tanto, la distancia entre la Tierra y Venus es

$$d_{TV} = \frac{d_{obs}}{\theta} = \frac{6378 \text{ km}}{1.54 \times 10^{-4} \text{ rad}} = 4.137 \times 10^7 \text{ km.}$$

Según la tercera ley de Kepler $T^2 = a^3$, donde T es el período orbital de un planeta (en años) y a es su distancia al Sol (en UA). El período de Venus es de 224.7 *días* = 0.615 *años*, entonces tenemos que

$$a = T^{2/3} = (0.615)^{2/3} = 0.723 \text{ UA.}$$

La distancia de la Tierra a Venus la podemos expresar como

$$d_{TV} = 1 \text{ UA} - 0.723 \text{ UA} = 0.277 \text{ UA}.$$

Comparando esta distancia (en UA) con el valor que encontramos anteriormente (en km) tenemos que

$$d_{TV} = 0.277 \text{ UA} = 4.137 \times 10^7 \text{ km},$$

y por lo tanto,

$$1 \text{ UA} \approx 1.5 \times 10^8 \text{ km}.$$

b) Una vez conocida esta distancia y los períodos orbitales de los planetas, podemos calcular las distancias de todos los planetas del Sistema solar a partir de la tercera ley de Kepler. Midiendo el diámetro angular de los planetas podemos determinar también su diámetro real.

1.13. Diámetro de Saturno y su distancia al Sol

El **diámetro angular** medio de Saturno en el punto de máximo acercamiento a la Tierra. Es del orden de 1.24 veces mayor que en el punto de máximo alejamiento. Haz una estimación de la distancia de Saturno al Sol.

Respuesta

El diámetro angular de Saturno lo podemos expresar como $\gamma \simeq d/D$, con d el diámetro real de Saturno y D su distancia.

Tenemos que $D_{al}/D_{ac} \simeq 1.24$, donde D_{al} es la distancia de máximo alejamiento y D_{ac} es la de máximo acercamiento. Como el radio orbital de la Tierra es de 1 UA entonces $D_{al} = R_S + 1$ con R_S el radio promedio de la órbita de Saturno (en UA), y $D_{ac} = R_S - 1$. Por lo tanto,

$$\frac{D_{al}}{D_{ac}} = \frac{R_S + 1}{R_S - 1} \simeq 1.24. \quad (1.10)$$

Despejando R_S y realizando operaciones tenemos que

$$R_S = 9.33 \text{ UA} = 1.4 \times 10^9 \text{ km}.$$

1.14. Diámetro de la Luna

La distancia media entre la Tierra y la Luna es de $384\,401\text{ km}$ y la distancia media entre la Tierra y el Sol es de $1.5 \times 10^8\text{ km}$. Supongamos que ocurre un **eclipse** total de Sol (la Luna entre la Tierra y el Sol).

- ¿Cuál es la relación entre los diámetros del Sol y de la Luna?
- El **ángulo que subtende** la Luna vista desde la Tierra es de 0.52° , calcula el diámetro de la Luna en *kilómetros*.

Respuestas

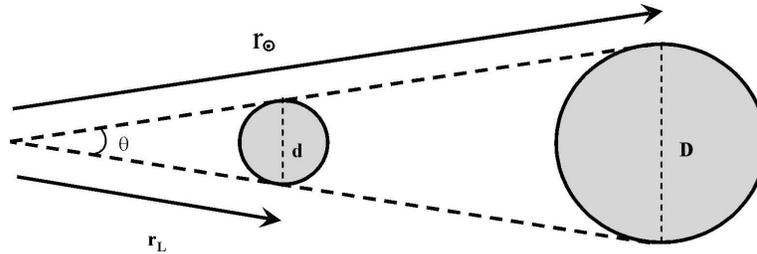


Figura 1.7: Posición aparente de la Luna y el Sol vista desde la Tierra. r_L representa la distancia entre la Tierra y la Luna, r_\odot la distancia entre la Tierra y el Sol; d y D representan el diámetro de la Luna y el Sol, respectivamente.

a) Cuando θ se mide en *radianes*, este es igual a la longitud de arco dividido entre el radio. Para circunferencias de radio muy grande y valores de θ muy pequeños, el arco es aproximado a la línea punteada mostrada en la Figura 1.7, corresponde al diámetro d y D de la Luna y el Sol respectivamente. Por lo tanto,

$$\theta = \frac{d}{r_L} = \frac{D}{r_\odot} \implies \frac{r_\odot}{r_L} = \frac{D}{d}.$$

Conociendo la distancia media entre la Tierra y la Luna $r_L = 384\,401\text{ km}$ y la distancia media entre la Tierra y el Sol $r_\odot = 1.5 \times 10^8\text{ km}$ tenemos que

$$\frac{D}{d} = \frac{1.5 \times 10^8\text{ km}}{384\,401\text{ km}} = 390.21.$$

b) El ángulo en *radianes* es alrededor de $\theta = 9.075 \times 10^{-3}\text{ rad}$. Para encontrar el diámetro de la Luna sustituimos en la ecuación anterior:

$$d = \theta r_L = (9.075 \times 10^{-3}\text{ rad})(384\,401\text{ km}) = 3\,488.4\text{ km}.$$

El diámetro aproximado de la Luna es $D \approx 3\,488.4\text{ km}$.

1.15. Júpiter visto desde su satélite Io

Calcula el **ángulo que subtiende** Júpiter visto desde su satélite Io si el radio de Júpiter es de $71\,492\text{ km}$ y la distancia que los separa es de $422 \times 10^3\text{ km}$.

Respuesta

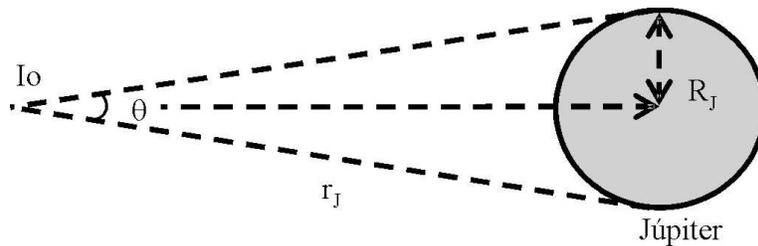


Figura 1.8: Ángulo que subtiende Júpiter visto desde su satélite Io.

Sea r_J la distancia Júpiter-Io y R_J el radio ecuatorial de Júpiter. De la geometría del problema podemos hallar $\theta/2$, que es la mitad del ángulo que subtiende Júpiter visto desde Io. Relacionando el cateto opuesto y el cateto adyacente formado por el triángulo rectángulo de la Figura 1.8, tenemos

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{R_J}{r_J} \\ \theta &= 2 \tan^{-1}\left(\frac{R_J}{r_J}\right) = 2 \tan^{-1}\left(\frac{71\,492\text{ km}}{422 \times 10^3\text{ km}}\right) \\ \theta &= 19.23^\circ.\end{aligned}$$

1.16. El Sol observado desde Plutón

En la órbita elíptica de un cuerpo alrededor del Sol se identifican particularmente dos puntos, el más cercano al Sol y el más lejano. El **afelio** es la posición en la que el objeto está en el punto más alejado del Sol. El Sol observado desde la Tierra, es decir a una distancia de $1\text{ UA} = 1.5 \times 10^8\text{ km}$, subtiende un ángulo de $32'$ (minutos de arco) y la distancia entre Plutón y el Sol en su afelio es de 49.27 UA .

- ¿Qué **ángulo subtiende** el Sol desde Plutón cuando está en su afelio?
- Si el radio del Sol es $6.96 \times 10^5\text{ km}$, ¿a qué distancia tendrías que colocar una moneda de 2 cm de diámetro para que subtienda el mismo ángulo?

- c) ¿A qué distancia tendrías que colocar la misma moneda para que subtendiera mismo el ángulo del Sol visto desde la Tierra?

Respuestas

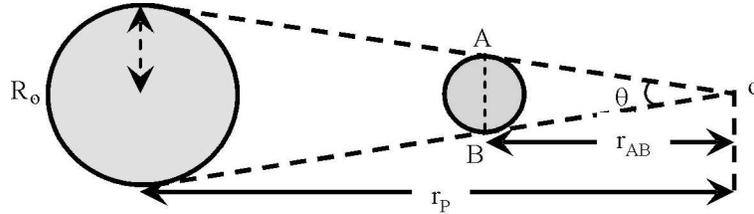


Figura 1.9: La línea \overline{AB} y $2R_{\odot}$ subtienen el mismo ángulo, es decir, la moneda y el Sol subtienen el mismo ángulo a las distancias r_{AB} y r_P , respectivamente.

- a) El diámetro angular depende del diámetro del Sol ($2R_{\odot}$) y de la distancia del Sol a Plutón r_P . Si se considera que θ es muy pequeño, es decir $\theta \ll 1$, que el radio del Sol es $R_{\odot} = 6.96 \times 10^5 \text{ km}$ y que $1 \text{ UA} = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{2R_{\odot}}{r_P} = \frac{2(6.96 \times 10^5 \text{ km})}{7.39 \times 10^9 \text{ km}} \\ \theta &= 0.64' .\end{aligned}$$

El Sol visto desde la superficie de Plutón subtende un ángulo de $0.64'$.

- b) De la Figura 1.9, $\theta = 2R_{\odot}/r_P$. Por otra parte, la moneda debe subtender el mismo ángulo θ que subtende el Sol visto desde Plutón. Haciendo el mismo análisis anterior a la longitud de arco \overline{AB} (diámetro de la moneda), se tiene:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\overline{AB}}{r_{AB}} = \frac{2R_{\odot}}{r_P} \\ r_{AB} &= \frac{r_P \overline{AB}}{2R_{\odot}} = \frac{(7.39 \times 10^9 \text{ km})(2 \times 10^{-5} \text{ km})}{2(6.96 \times 10^5 \text{ km})} \\ r_{AB} &= 0.10617 \text{ km} = 106.17 \text{ m} .\end{aligned}$$

El ángulo que subtende el Sol visto desde Plutón es $0.64'$ (minutos); para que una moneda de 2 cm de diámetro subtienda el mismo ángulo sobre la misma superficie (Plutón) será necesario colocarla frente al observador a 106.17 m .

c) De la misma forma que en el caso anterior, primero calculamos el ángulo θ que subtende el Sol visto desde la Tierra. Considerando que el radio del Sol es $R_{\odot} = 6.96 \times 10^5 \text{ km}$ y que la distancia entre el Sol y la Tierra es $r_T = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{2R_{\odot}}{r_T} = \frac{2(6.96 \times 10^5 \text{ km})}{1.5 \times 10^8 \text{ km}} \\ \theta &= 9.27 \times 10^{-3} \text{ rad.} = 0.53^{\circ} = 32'\end{aligned}$$

Por otra parte, la moneda debe subtender el mismo ángulo θ , visto desde la superficie de la Tierra. Considerando ahora la distancia entre la Tierra y el Sol como r_T , se debe cumplir:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\overline{AB}}{r_{AB}} = \frac{2R_{\odot}}{r_T} \\ r_{AB} &= \frac{r_T \overline{AB}}{2R_{\odot}} = \frac{(1.5 \times 10^8 \text{ km})(2 \times 10^{-5} \text{ km})}{2(6.96 \times 10^5 \text{ km})} \\ r_{AB} &= 2.155 \times 10^{-3} \text{ km} = 2.15 \text{ m.}\end{aligned}$$

El Sol subtende un ángulo $\theta = 0.53^{\circ}$ visto desde la Tierra, para subtender el mismo ángulo con una moneda de 2 cm de diámetro será necesario colocarla frente al observador a 2.15 m.

1.17. Castillo de Chichén Itzá

Un estudiante después de tomar su curso de astronomía viajó el pasado 22 de diciembre a la antigua ciudad maya de Chichén Itzá, situada a una latitud norte de 20.4° , con el objetivo de medir la altura de la pirámide el Castillo. Ese día la declinación del Sol fue de $\delta_{\odot} = -23.43^{\circ}$ y durante la **culminación** del Sol, el estudiante midió que la sombra de la pirámide el Castillo sobresalía de la base 1 m. Si dicho estudiante midió que la base del Castillo es de 55.5 m,

- ¿cuál es la altura de la pirámide?
- ¿Podrías medir la altura de la pirámide con este método usando mediciones del 23 de junio?, ¿por qué?

Respuestas

a) En la Figura 1.10, el ángulo de declinación es $\delta_{\odot} = -23.43^{\circ}$ y la latitud del Castillo de Chichén Itzá forma un ángulo $\theta = 20.4^{\circ}$ con el ecuador. La línea

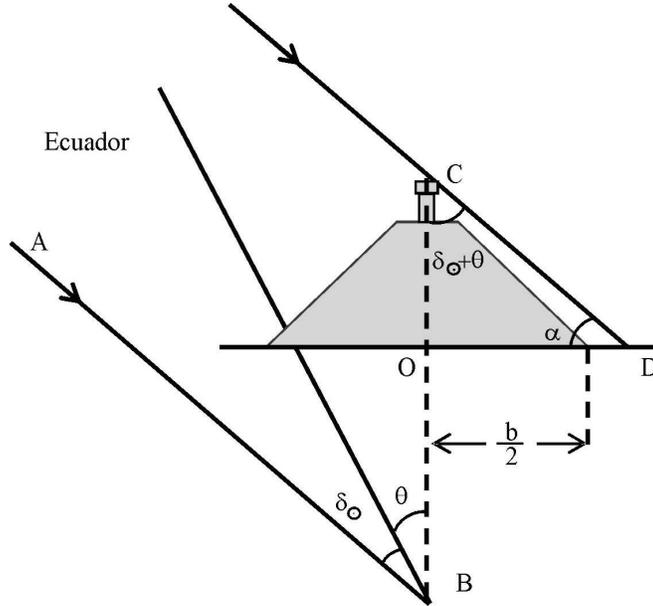


Figura 1.10: Declinación del Sol respecto al ecuador y latitud a la cual se encuentra el Castillo de Chichén Itzá. La recta \overline{AB} y \overline{CD} representan la declinación del Sol respecto al ecuador, la recta \overline{CB} representa la latitud a la cual se encuentra el Castillo, la recta \overline{CO} la altura y \overline{OD} la longitud de la sombra.

recta \overline{AB} representa la declinación del Sol y ésta es paralela a la línea recta \overline{CD} , la cual representa la sombra proyectada por el Castillo. Por otra parte, la recta \overline{CB} representa la latitud a la cual se encuentra el Castillo. La recta \overline{CB} corta a las paralelas, de tal manera que el ángulo $\delta_{\odot} + \theta$ en B es igual $\delta_{\odot} + \theta$ en C , por ser ángulos alternos internos. La línea recta \overline{CO} y \overline{OC} forman un ángulo recto, por lo tanto es posible conocer el ángulo α que hace la sombra con la horizontal. Así,

$$\begin{aligned}\alpha + 90^{\circ} + (\delta_{\odot} + \theta) &= 180^{\circ} \\ \alpha &= 180^{\circ} - 90^{\circ} - (\delta_{\odot} + \theta) \\ \alpha &= 46.17^{\circ}.\end{aligned}$$

Si la base de la pirámide es $b = 55.5 \text{ m}$, la distancia del punto O al punto D , denotada por d es

$$\begin{aligned}d &= \frac{b}{2} + 1 \text{ m} \\ d &= \frac{55.5 \text{ m}}{2} + 1 \text{ m} \\ d &= 28.75 \text{ m}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la Figura 1.10 y mediante la identidad $\tan \alpha = CO/CA$, se tiene que

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\overline{CO}}{\overline{OD}} = \frac{h}{d} \\ h &= d \tan \alpha \\ h &= 29.94 \text{ m.}\end{aligned}$$

Es decir, la altura del Castillo de Chichén Itzá es de 29.9 *m*. Este valor es aproximado a los 30 *m* que se reportan. Cabe mencionar que la pirámide llamada el Castillo de Chichén Itzá, por votación a través de internet, en el 2007 fue elegida como una de las siete maravillas modernas del mundo.

b) No sería posible medir la altura de la pirámide en el solsticio de junio ya que el Sol sale aproximadamente a unos 23.5° hacia el norte y la latitud de la pirámide es de 20.4° ; por lo tanto, en la culminación el Sol proyectaría una sombra que no sobresale de la base (sería del orden de un *metro*). Sin embargo, este método puede ser utilizado por una persona en el hemisferio sur ya que las condiciones se invierten.

1.18. Altura del volcán Mauna Kea

Una lancha viaja en dirección norte-sur, inicialmente está a la misma **latitud** que la cima del volcán Mauna Kea y va a una velocidad de 75 *km/h*. En la **culminación** del Sol, la lancha llega a la latitud a la que se encuentra el extremo de la sombra del volcán en un tiempo de 3.1 *min*. Si la declinación del Sol fue $\delta_\odot = -23.43^\circ$ para esa fecha y la latitud norte a la cual se encuentra el volcán es de $\theta = 19.32^\circ$, determina la altura *h* del volcán.

Respuesta

Conociendo la velocidad *v* a la cual se mueve la lancha y el tiempo *t* que le lleva alcanzar el extremo de la sombra desde la base, determinamos la longitud de la sombra *d*, que dicho volcán proyecta sobre el mar:

$$\begin{aligned}v &= \frac{d}{t} \\ d &= vt.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Como se ve en la Figura 1.11, el ángulo de declinación del Sol es δ_\odot y la latitud del volcán forman un ángulo θ con el ecuador. La línea recta \overline{AB} representa la

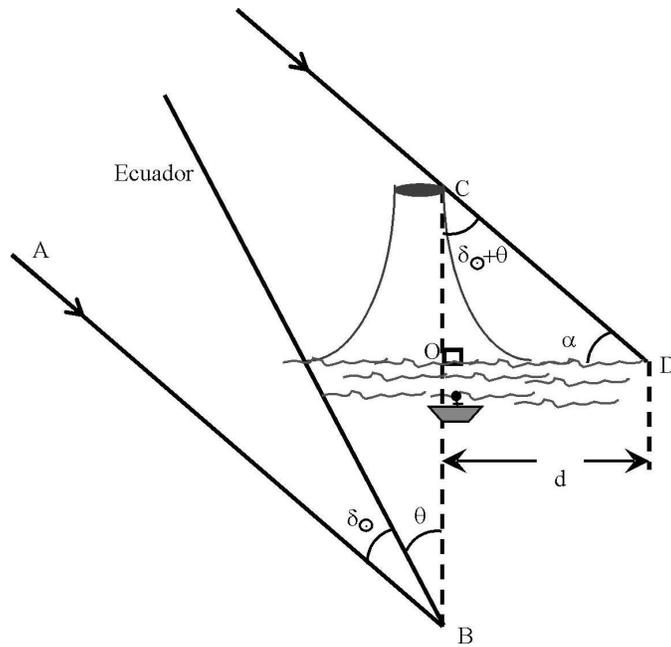


Figura 1.11: Diagrama de la posición de la lancha. La recta \overline{AB} y \overline{CD} representan la declinación del Sol respecto al ecuador, la recta \overline{CB} representa la latitud a la cual se encuentra el volcán Mauna Kea, la recta \overline{CO} la altura y \overline{OD} la longitud de la sombra sobre el mar.

declinación del Sol y ésta es paralela a la línea recta \overline{CD} , la cual representa la sombra proyectada por el volcán. Por otra parte, la recta \overline{CB} representa la latitud a la cual se encuentra el volcán. La recta \overline{CB} corta a las rectas paralelas \overline{AB} y \overline{CD} de tal manera que el ángulo $\delta_{\odot} + \theta$ en B es igual a $\delta_{\odot} + \theta$ en C, por ser ángulos alternos internos. La línea recta \overline{CO} y \overline{OC} forman un ángulo recto, por lo tanto es posible conocer el ángulo α que hace la sombra con la horizontal en el punto D:

$$\begin{aligned}\alpha + 90^{\circ} + (\delta_{\odot} + \theta) &= 180^{\circ} \\ \alpha &= 180^{\circ} - 90^{\circ} - (\delta_{\odot} + \theta) \\ \alpha &= 47.25^{\circ}.\end{aligned}$$

Relacionando la longitud de la sombra d que se proyecta sobre el mar y el ángulo α que forma la sombra con la horizontal, determinamos la altura h del volcán:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\overline{CO}}{\overline{OD}} = \frac{h}{d} \\ h &= d \tan \alpha \\ h &= vt \tan \alpha.\end{aligned}$$

Sustituyendo valores en las unidades correspondientes, se tiene que la altura del volcán es

$$\begin{aligned}h &= \left(20.8 \frac{m}{s}\right) (186 s) \tan(47.25^\circ) \\ h &\approx 4191.95 m.\end{aligned}$$

1.19. Posición de una persona en un edificio

Supón que una persona se encuentra recostada en la base de un ascensor con vista a la playa observando al Sol que se pone en un océano en calma y hace arrancar el cronometro justo cuando desaparece su parte superior. Entonces se pone de pie, sube por el ascensor y detiene el cronómetro cuando la parte superior del Sol desaparece nuevamente. Si el tiempo transcurrido en el reloj es de 30 *segundos* y sabiendo que el radio de la Tierra es $R_{\oplus} = 6\,378\text{ km}$, ¿cuál es la altura aproximada a la que se encontraba en el momento de detener el reloj?

Respuesta

En la primera puesta del Sol la línea de vista es tangente a la superficie de la Tierra y a la base del edificio en el punto A . Para la segunda puesta de Sol después de subir por el ascensor la línea de vista es tangente a la superficie de la Tierra en el punto B . Representamos por d la distancia entre el punto B y la altura h en la que nos encontramos. Trazamos radios R_{\oplus} en los puntos en los cuales la línea de visión es tangente en la primera y segunda puesta de Sol (puntos A y B de la Figura 1.12). Partiendo del teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\begin{aligned}(R_{\oplus} + h)^2 &= R_{\oplus}^2 + d^2 \\ R_{\oplus} + h &= (R_{\oplus}^2 + d^2)^{1/2} \\ R_{\oplus} + h &= R_{\oplus} \left(1 + \frac{d^2}{R_{\oplus}^2}\right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

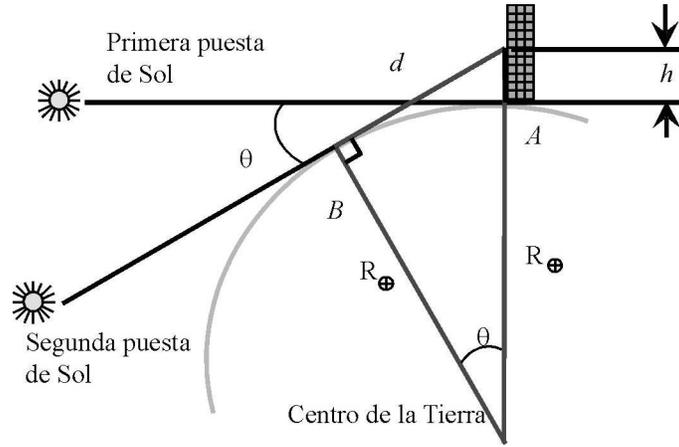


Figura 1.12: Primera puesta del Sol vista desde la base del edificio y una segunda puesta del Sol al subir por el ascensor del edificio.

Como $R_{\oplus} \gg d$, entonces el cociente $d^2/R_{\oplus}^2 \ll 1$, y por lo tanto, utilizando la propiedad de

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

y, considerando sólo términos de primer orden se tiene que

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{d^2}{R_{\oplus}^2}\right)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{R_{\oplus}^2}\right) - \frac{1}{2 \cdot 4}\left(\frac{d^2}{R_{\oplus}^2}\right) + \dots \\ \left(1 + \frac{d^2}{R_{\oplus}^2}\right)^{1/2} &\approx 1 + \frac{d^2}{2R_{\oplus}^2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Sustituyendo (1.13) en la ecuación (1.12) se tiene que

$$\begin{aligned} R_{\oplus} + h &\approx R_{\oplus} \left(1 + \frac{d^2}{2R_{\oplus}^2}\right) \\ R_{\oplus} + h &\approx R_{\oplus} + \frac{d^2}{2R_{\oplus}} \\ h &\approx \frac{d^2}{2R_{\oplus}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Por otra parte, de la Figura 1.12 se tiene que $d = R_{\oplus} \tan \theta$. Al sustituir d en la

ecuación (1.14) se tiene que

$$\begin{aligned}
 h &\approx \frac{d^2}{2R_{\oplus}} \\
 h &\approx \frac{R_{\oplus}^2 \tan^2 \theta}{2R_{\oplus}} \\
 h &\approx \frac{R_{\oplus} \tan^2 \theta}{2}.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Ahora, finalmente, resta conocer θ . El ángulo entre los radios a los dos puntos tangentes A y B es θ , que también es el ángulo por el cual se mueve el Sol alrededor de la Tierra durante el tiempo medido t . Durante todo un día, aproximadamente 24 hrs , el Sol se mueve un ángulo de 360° con relación a la Tierra. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{\theta}{360^\circ} &= \frac{t}{24 \text{ hrs}} \\
 \theta &= \frac{(360^\circ)(30 \text{ s})}{(86\,400 \text{ s})} \\
 \theta &= 0.125^\circ.
 \end{aligned}$$

Así, sustituyendo el valor del ángulo θ en la ecuación (1.15) se tiene que

$$\begin{aligned}
 h &\approx \frac{R_{\oplus} \tan^2 \theta}{2} \\
 h &\approx \frac{[6\,378 \text{ km}][\tan^2(0.125^\circ)]}{2} \\
 h &\approx 1.51 \times 10^{-2} \text{ km} \\
 h &\approx 15.17 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el momento que detuvo el reloj, la persona se encontraba a una altura aproximada de 15.17 m con respecto a la base del edificio.

1.20. Trayectoria del Sol en el mes de octubre

Supón que en el mes de octubre llegas a Tonantzintla, en el estado de Puebla, que se encuentra aproximadamente a 19° de **latitud** norte. Te levantas por la mañana y ves que el Sol, al irse levantando sobre el **horizonte**, no sigue una trayectoria perpendicular al horizonte sino inclinada. Haz un dibujo de lo que verías y explícalo.

1.21. Causa de las estaciones del año

El eje polar terrestre no es perpendicular al plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol (plano de la **eclíptica**). Si nos imaginamos una línea perpendicular al plano de la órbita entonces el eje de la Tierra está inclinado con respecto a esta línea formando un ángulo de 23.5° (sección 1.1). Por otro lado, la órbita de la Tierra es una elipse (aunque se aproxima mucho a una circunferencia).

- a) ¿El invierno ocurre cuando la Tierra está más lejos del Sol?
- b) ¿Cuando en el hemisferio norte es invierno, en el hemisferio sur es verano? ¿A qué se debe esto?
- c) ¿Qué pasaría si el **eje polar** fuera perpendicular al plano de la órbita terrestre?

1.22. Distancia a Venus

La distancia a Venus puede obtenerse con precisión mediante triangulación cuando Venus está en el punto de máximo acercamiento. Dos observadores terrestres separados por $11\,500\text{ km}$ (medidos sobre la superficie de la Tierra) encuentran que la posición de Venus respecto al fondo de estrellas difiere en 49 segundos del arco ($''$).

- a) Calcula la distancia a Venus en el punto de máximo acercamiento.
- b) A esa distancia, el **diámetro angular** de Venus es de $63''$, mientras que cuando está en el punto de máximo alejamiento su diámetro angular es de $10''$. Suponiendo que tanto la órbita de la Tierra como la de Venus son circulares y concéntricas, calcula los radios de las dos órbitas.

1.23. Duración del tránsito de Venus

Muestra que el tránsito de Venus a través del disco solar tiene una duración de unas 8 horas . El **período sinódico** de Venus es de 584 días, su radio orbital es de 0.723 UA y el tamaño angular del Sol, visto desde la Tierra, es de $\sim 32'$.

- a) ¿La duración del tránsito será siempre de 8 horas ?
- b) ¿Por qué usamos el período sinódico en vez del período orbital de Venus (224.7 días)?

1.24. Estrellas en culminación

Supongamos que una persona en el hemisferio norte observa una **estrella** que, al estar en **culminación** superior, se encuentra al norte del **cenit** de dicho observador.

- a) Encuentra una ecuación que relacione la **declinación**, δ , de la estrella, la altura de la estrella y la **latitud** del lugar.
- b) Encuentra una ecuación que relacione los mismos parámetros del inciso a) pero, para la culminación inferior.
- c) ¿Cual es la latitud mínima a partir de la cual una estrella con $\delta > 0$ se ve cuando está en culminación inferior?

Capítulo 2

Planeta Tierra

2.1. Escala de placa

El Sol tiene un diámetro de aproximadamente medio grado. Supongamos que vamos a fotografiarlo y podemos elegir la **escala de placa** para que la imagen del Sol en el negativo tenga un diámetro de 5 mm .

- ¿Qué distancia focal deberá tener el objetivo de la cámara fotográfica?
- Si la distancia focal de nuestra cámara fuera de 50 mm , ¿cuál sería, en el negativo, el diámetro del Sol en milímetros?
- Si en el caso anterior el tamaño del negativo es de $24\text{ mm} \times 35\text{ mm}$ (un tamaño muy usado en la fotografía tradicional) e imprimimos la imagen de este negativo en una hoja de papel cuyo lado menor mide 10 cm , ¿qué diámetro tendrá la imagen del Sol en dicha hoja?
- ¿Utilizarías ésta cámara para obtener la imagen de una mancha solar cuyo diámetro es de $2'$?, ¿por qué?

Respuestas

a) La escala de placa es la relación entre el ángulo (α) que subtiende un objeto y el tamaño de la imagen (s) de dicho objeto en el plano focal, entonces,

$$f = \frac{s}{\alpha}, \quad (2.1)$$

donde f es la distancia focal. Si en la ecuación de la escala de placa f y s están en las mismas unidades, el ángulo α debe estar en radianes. El ángulo α que subtiende

el Sol lo conocemos en grados, entonces tenemos que transformarlo a radianes, de modo que

$$\alpha = \frac{(0.5^\circ) 2\pi}{360^\circ} = 0.00873 \text{ rad.}$$

Por lo tanto,

$$f = \frac{5 \text{ mm}}{0.00873} = 573 \text{ mm.}$$

Ésta es la distancia focal que debería tener el objetivo óptico de nuestra cámara para que la imagen del Sol, en el negativo, tuviera un diámetro de 5 mm.

b) Con un objetivo de 50 mm, el diámetro de la imagen del Sol, en el negativo, sería

$$s = f \alpha = (50 \text{ mm})(0.00873) = 0.44 \text{ mm.}$$

c) Si en un negativo cuyo lado menor es 24 mm se obtuvo un diámetro solar de 0.44 mm, entonces, en una hoja cuyo lado menor es 10 cm, se tiene que el diámetro solar es

$$\frac{(0.44 \text{ mm})(100 \text{ mm})}{24 \text{ mm}} = 1.8 \text{ mm.}$$

Esto significa que, aunque amplie la imagen tomada con una cámara cuya distancia focal es de 50 mm, de todos modos, la imagen del Sol sería muy pequeña.

d) Como en un grado hay 60' (minutos), entonces 2' corresponden a 0.033°, o bien, a 0.00058 rad. Entonces, $\alpha_m = 2' = 0.00058 \text{ rad}$ sería el diámetro de la mancha que veríamos. Si la fotografiamos con un objetivo de $f = 50 \text{ mm}$ el tamaño de la mancha en el negativo sería

$$s = (50 \text{ mm})(0.00058) = 0.029 \text{ mm.}$$

Para que la mancha tuviera un diámetro de 1 mm sobre un papel fotográfico deberíamos ampliar el negativo por un factor determinado por el cociente entre el valor en el papel y el valor en el negativo, es decir,

$$\frac{1 \text{ mm}}{0.029 \text{ mm}} = 34.5 \text{ veces.}$$

Esto daría una hoja de papel cuyo lado menor sería de $24 \text{ mm} \times 34.5 = 82.8 \text{ cm}$. En consecuencia no usaríamos la cámara con el objetivo óptico del inciso b) para fotografiar la mancha porque tendríamos que ampliar la imagen 34.5 para que fuera de 1 mm.

2.2. Espejos y antenas parabólicos

Supongamos que una onda plana incide paralelamente al eje de un **paraboloide** de revolución. También vamos a suponer que la onda es reflejada por la superficie cóncava del paraboloide. Demuestra que los haces de dicha onda convergen en fase en el foco de la parábola.

Respuesta

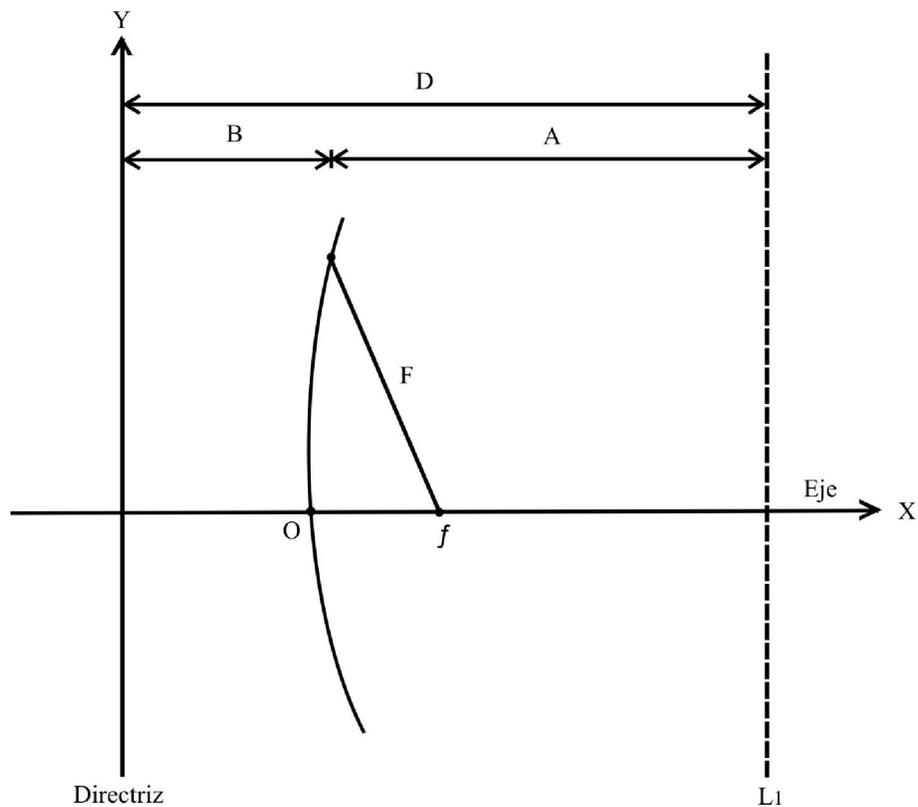


Figura 2.1: Parábola cuyo eje está ubicado a lo largo del eje x .

De la definición de parábola y de la Figura 2.1 tenemos que

$$B = F, \quad (2.2)$$

donde B es la mínima distancia entre la directriz y el punto P , y F es la distancia

entre el punto P y el foco, f .

Ahora, vamos a emplear una línea recta, L_1 , para expresar el frente de la onda plana que incide paralelamente al eje de la parábola sobre la parte cóncava. En la Figura 2.1 se ve que, para el punto P sobre la parábola, la distancia total entre L_1 y f es $A + F$. Además, de la ecuación (2.2) se sigue que esa distancia es

$$A + F = A + B = D. \quad (2.3)$$

Podemos ver que para cualquier punto, sobre la parábola de la Figura 2.1, se cumple la ecuación (2.3). Es decir, si ahora tomamos dos puntos sobre dicha parábola, tenemos que la distancia desde la recta L_1 hasta el foco, f , es $A_1 + F_1 = D$ para uno de ellos y $A_2 + F_2 = D$ para el otro punto. Es decir,

$$A_1 + F_1 = A_2 + F_2. \quad (2.4)$$

Esto quiere decir que dos haces que se reflejan en dos puntos diferentes de la parábola recorren la misma distancia hasta el foco. Lo cual demuestra que los haces llegan con la misma fase al foco.

2.3. Resolución angular del ojo humano

En un ojo humano, el tamaño de la región que permite el paso de la luz es de aproximadamente 5 mm . El rango de longitudes de onda del visible (las que vemos a simple vista) es de $\sim 4000 \text{ \AA}$ a $\sim 7000 \text{ \AA}$. En los cálculos posteriores podemos emplear un valor de 5000 \AA como una longitud de onda que captamos a simple vista.

- a) Calcula la **resolución angular** (en segundos de arco) de un ojo humano y la resolución del telescopio del INAOE en Cananea, Sonora, el cual tiene un espejo, como objetivo óptico, cuyo diámetro es de 2 m .
- b) Si tuviéramos otro telescopio cuya resolución fuera de $1''$, ¿podríamos distinguir un cráter lunar de 1 km de diámetro?, ¿por qué?
- c) Supongamos que, en una fotografía, la Luna tiene un diámetro de 41 cm y, en la misma fotografía, el cráter Copérnico tiene un diámetro de aproximadamente 8 mm . Calcula el diámetro del cráter Copérnico en kilómetros.
- d) Si tomamos una fotografía con un telescopio cuya resolución angular es de $0.5''$ y esa imagen la ampliamos en una fotografía en la que el cráter Copérnico tuviera un diámetro de 20 cm en lugar de 8 mm , ¿podríamos distinguir un cráter lunar de 1 km de diámetro?

Respuestas

a) La resolución del ojo es

$$\phi_{ojo} = \frac{5\,000 \times 10^{-7} \text{ mm}}{5 \text{ mm}} = 1 \times 10^{-4} \text{ rad} = 20.6'' ,$$

y la resolución del telescopio de 2 m de diámetro de Cananea es

$$\phi_{Can} = \frac{5\,000 \times 10^{-7} \text{ mm}}{2 \text{ m}} = 0.05'' .$$

b) El ángulo que subtende la Luna (vista desde la Tierra) es de $\approx 0.5^\circ \approx 30'$. Además, sabemos que su diámetro es de 3 476 km. Entonces, la relación entre el ángulo que subtende un objeto en la Luna y el tamaño de dicho objeto, en kilómetros, está dada por

$$K[''/km] = \frac{30'}{3\,476 \text{ km}} = 0.5 [''/km].$$

Por lo tanto, el ángulo que subtende un cráter lunar de 1 km de diámetro es de 0.5''. Empleando un instrumento óptico cuya resolución es de 1'' no se podría resolver (distinguir) dicho cráter.

c) El cociente entre el tamaño de la Luna y el tamaño de su imagen en la fotografía (41 cm) es igual a la extensión de un objeto en la Luna (en kilómetros) y el tamaño de dicho objeto en la foto en centímetros. Dicho valor es

$$K[km/cm] = \frac{3\,476}{41} = 84.8 \frac{km(Luna)}{cm(foto)},$$

y por lo tanto el diámetro del cráter es de $K \times 0.8 \text{ (cm)} = 84.8 \times 0.8 = 68 \text{ km}$.

d) No podríamos distinguir el cráter lunar porque el ángulo ϕ tiene que ser estrictamente menor que el objeto del cual queremos obtener una imagen. Si ϕ es menor que el objeto podemos muestrear distintas partes del mismo. Entre menor sea el valor de ϕ , en relación al ángulo subtendido por el objeto, vamos a poder distinguir más detalles de dicho objeto. En términos astronómicos, se dice que vamos a tener mejor resolución. En el caso de un cráter lunar de 1 km de diámetro, el ángulo que subtende es similar a la resolución mencionada (0.5'') en este inciso. Por lo tanto, no se puede obtener una imagen de dicho cráter.

2.4. proyectil horizontal

Supón que la Tierra es esférica y sin ningún relieve, con un radio de $6\,378\text{ km}$. Calcula la velocidad de un proyectil disparado horizontalmente en las proximidades de la superficie terrestre para que se coloque en órbita.

Respuesta

La única fuerza que actúa sobre el proyectil es el peso Mg , y la aceleración del movimiento, debido a que es uniforme, es la aceleración centrípeta que tiene la misma dirección y sentido que el peso. Aplicando la segunda ley de Newton tenemos que

$$F = Ma_c \quad \text{donde} \quad a_c = \frac{v^2}{R_{\oplus}}.$$

Para que el proyectil se mantenga en órbita es necesario que la fuerza de gravedad sea igual a la fuerza centrípeta, por lo tanto,

$$\begin{aligned} Mg &= M \frac{v^2}{R_{\oplus}} \\ v &= \sqrt{R_{\oplus}g} \\ v &= \sqrt{(6\,370 \times 10^3\text{ m})(9.8\text{ m/s}^2)} \\ v &= 7\,901\text{ m/s}. \end{aligned}$$

2.5. Oxígeno y vapor de agua en montañas altas

El volcán Sierra Negra es la sede de uno de los mayores telescopios astronómicos del mundo, llamado gran telescopio milimétrico (GTM); este volcán tiene una altura de $4\,580\text{ m}$. Por otra parte, el monte Everest (el pico montañoso más elevado del mundo, situado en la cordillera del Himalaya) tiene una altura de $8\,848\text{ m}$. Conociendo que la **escala de altura**, H , para el oxígeno es de 7 km y que la escala de altura para el vapor de agua es de 13 km , para el monte Everest y el volcán Sierra Negra, calcula:

- El porcentaje de oxígeno que hay en la cima, en relación a la cantidad que hay a nivel del mar.
- El porcentaje de vapor de agua que hay en la cima, en relación a la cantidad que hay a nivel del mar.

- c) La densidad de oxígeno que hay en la cima, en relación a la cantidad que hay a nivel del mar, si la densidad de oxígeno a nivel del mar es $1\,225\text{ gr}/\text{m}^3$.
- d) La densidad de vapor de agua que hay en la cima, en relación a la cantidad que hay a nivel del mar, si la densidad del vapor de agua es $100\text{ gr}/\text{m}^3$.

Respuestas

a) El cociente de ρ entre ρ_0 da información de la cantidad de oxígeno que hay en la cima del Everest en relación a la cantidad que hay a nivel del mar, siendo $h = 8.848\text{ km}$ y $H = 7\text{ km}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_0} &= e^{-\left(\frac{h}{H}\right)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= e^{-\left(\frac{8.848\text{ km}}{7\text{ km}}\right)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= 0.282.\end{aligned}$$

Esto es, a $8\,848\text{ m}$ sólo se tiene 28.2% de la cantidad de oxígeno que hay en la superficie de la Tierra.

De la misma forma se calcula la cantidad de oxígeno en la cima del volcán Sierra Negra, considerando que su altura es $h = 4.580\text{ km}$ y $H = 7\text{ km}$.

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_0} &= e^{-\left(\frac{h}{H}\right)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= e^{-\left(\frac{4.580\text{ km}}{7\text{ km}}\right)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= 0.519.\end{aligned}$$

En este caso se tiene 51.9% de la cantidad de oxígeno que hay en la superficie.

b) Para calcular el porcentaje de vapor de agua que hay en la cima del Everest y el volcán Sierra Negra, se considera el factor de escala para el vapor de agua $H = 13\text{ km}$. Por lo tanto, para la cima del Everest se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_0} &= e^{-\left(\frac{h}{H}\right)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= e^{-\left(\frac{8.848\text{ km}}{13\text{ km}}\right)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= 0.506.\end{aligned}$$

Para el volcán Sierra Negra se tiene que $h = 4.580 \text{ km}$ y $H = 13 \text{ km}$; de la misma forma se calcula

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_0} &= e^{-\left(\frac{h}{H}\right)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= e^{-\left(\frac{4.580 \text{ km}}{13 \text{ km}}\right)} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= 0.703.\end{aligned}$$

c) Conociendo la densidad de oxígeno a nivel del mar, $\rho_0 = 1\,225 \text{ gr/m}^3$ y el porcentaje de oxígeno que hay en la cima del Everest, la densidad de oxígeno en la cima es

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_0} &= 0.282 \\ \rho &= 0.282(1\,225 \text{ gr/m}^3) \\ \rho &= 345.4 \text{ gr/m}^3,\end{aligned}$$

y para el volcán Sierra Negra, la densidad de oxígeno en la cima es

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_0} &= 0.519 \\ \rho &= 0.519(1\,225 \text{ gr/m}^3) \\ \rho &= 635.7 \text{ gr/m}^3.\end{aligned}$$

d) Haciendo el mismo análisis anterior, determinamos la densidad de vapor de agua que hay en la cima del Everest y el volcán Sierra Negra, considerando que la densidad del vapor de agua es $\rho_0 = 100 \text{ gr/m}^3$. La densidad de vapor de agua en la cima del Everest es

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_0} &= 0.506 \\ \rho &= 0.506(100 \text{ gr/m}^3) \\ \rho &= 50.6 \text{ gr/m}^3,\end{aligned}$$

y para el volcán Sierra Negra:

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_0} &= 0.703 \\ \rho &= 0.703(100 \text{ gr/m}^3) \\ \rho &= 70.6 \text{ gr/m}^3.\end{aligned}$$

2.6. Diámetro de la Tierra

Supón que te encuentras recostado en una playa observando al Sol que se pone en un océano en calma, haces arrancar un cronómetro justo cuando desaparece su parte superior. Entonces te pones de pie elevando la vista a una altura $h = 1.7 \text{ m}$ y detienes el cronómetro cuando la parte superior del Sol desaparece de nuevo. Si el tiempo transcurrido en el reloj es $t = 11.1 \text{ s}$, ¿cuál es el valor aproximado del radio R_{\oplus} de la Tierra?

Respuesta

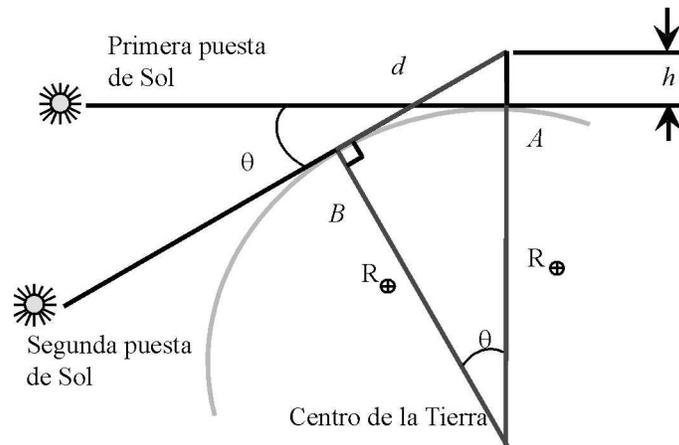


Figura 2.2: La línea de visión a la parte superior del Sol gira todo el ángulo θ cuando el observador se pone de pie en el punto A y eleva su vista una distancia h .

Justo cuando desaparece el Sol, nuestra línea de visión a la parte superior del Sol es tangente a la superficie de la Tierra. Dos de estas líneas de visión se muestran en la Figura 2.2. Ahí nuestros ojos se ubican en el punto A mientras estamos recostados en la arena y a una altura h arriba del punto A cuando estamos de pie. Para una situación posterior, la línea de visión es tangente a la superficie de la Tierra en el punto B . Representamos por d la distancia entre el punto B y la ubicación de nuestros ojos cuando estamos de pie, y trazamos radios R_{\oplus} como se muestra. De lo anterior, se observa que se forma un triángulo rectángulo entre el radio de la Tierra, la segunda puesta del Sol y la altura de la persona. A partir de este hecho, es posible conocer el radio de la Tierra en función del ángulo que se forma entre la

primera puesta y la segunda, mediante la función coseno.

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h} \\
 \cos \theta &= \frac{1}{1 + \frac{h}{R_{\oplus}}} \\
 \frac{1}{\cos \theta} &= 1 + \frac{h}{R_{\oplus}} \\
 \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) &= \frac{h}{R_{\oplus}} \\
 \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)} &= \frac{R_{\oplus}}{h} \\
 R_{\oplus} &= \frac{h}{\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)}. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Sólo basta determinar el valor del ángulo θ para la primera y la segunda puesta de Sol. En la Figura 2.2, el ángulo entre los radios a los dos puntos tangentes A y B es θ , que también es el ángulo por el cual se mueve el Sol alrededor de la Tierra durante el tiempo medido t . Durante todo un día, aproximadamente 24 *hrs*, el Sol se mueve un ángulo de 360° con relación a la Tierra. Esto nos permite escribir:

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{t}{24 \text{ hrs}},$$

y puesto que $t = 11.1$ s, tenemos:

$$\theta = \frac{(360^\circ)(11.1 \text{ s})}{(86\,400 \text{ s})} = 0.04625^\circ.$$

Al sustituir $\theta = 0.04625^\circ$ y $h = 1.7 \text{ m}$ en la ecuación (2.5), encontramos que

$$\begin{aligned}
 R_{\oplus} &= \frac{1.7 \text{ m}}{\left(\frac{1}{\cos 0.04625^\circ} - 1 \right)} \\
 R_{\oplus} &= \frac{1.7 \text{ m}}{\left(\frac{1}{0.999999} - 1 \right)} \\
 R_{\oplus} &= 5217925.1 \text{ m},
 \end{aligned}$$

que está aproximadamente dentro del 20 % del valor aceptado ($6.378 \times 10^6 \text{ m}$) para el radio ecuatorial terrestre.

2.7. Equilibrio entre la Tierra y la Luna

Supón que tenemos un objeto de masa M que está entre la Tierra y la Luna. Si la distancia media entre la Tierra y la Luna es de $384\,401\text{ km}$ y la masa de la Tierra es 81 veces mayor que la de la Luna, ¿en qué punto se equilibran las fuerzas que ejercen la Tierra y la Luna sobre dicho objeto?

Respuesta

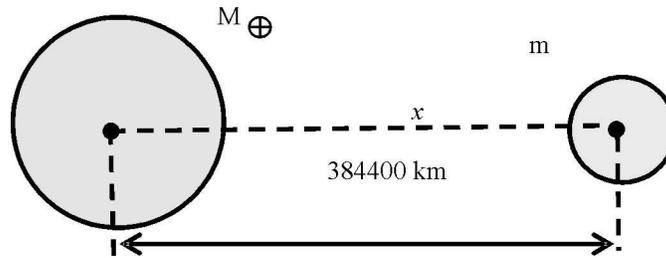


Figura 2.3: Fuerza de gravedad entre la Tierra y la Luna.

Llamando m a la masa de la Luna, la masa de la Tierra será $M_{\oplus} = 81 m$. Si x es la distancia entre el centro de la Tierra y un punto material en equilibrio, $(384\,401 - x)\text{ km}$ es la distancia del punto a la Luna. Llamamos M a la masa del punto material. Al ser iguales las dos atracciones dadas por la ley de gravitación universal, se tiene que

$$\begin{aligned} G \frac{M_{\oplus} M}{x^2} &= G \frac{m M}{(384\,401 - x)^2} \\ G \frac{81 m M}{x^2} &= G \frac{m M}{(384\,401 - x)^2} \\ \frac{81}{x^2} &= \frac{1}{(384\,401 - x)^2} \\ x^2 &= 81(384\,401 - x)^2 \\ x^2 &= (9 \times 384\,401 - 9x)^2 \\ \pm x &= 3\,459\,609\text{ km} - 9x, \end{aligned}$$

resolviendo para x en el caso positivo y negativo respectivamente:

$$x_1 = \frac{3\,459\,609\text{ km}}{10} = 345\,960.9\text{ km} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{3\,459\,609\text{ km}}{8} = 432\,451.1\text{ km}.$$

Esta última solución corresponde a un punto más allá de la Luna, donde son iguales las atracciones de los dos astros (ver Figura 2.3). Sin embargo, al ser del mismo sentido, en tal punto no existe equilibrio; por lo tanto, el punto de equilibrio es a 345 960.9 *km* de la Tierra.

2.8. Ingravidez y valor de g a una altura h

Cuando los astronautas están en el espacio, se dice que están en condiciones de ingravidez. Calcula a qué altura, sobre la superficie de la Tierra, la fuerza de gravedad sobre un objeto es igual a un décimo de la fuerza que se sentiría estando en la superficie de la Tierra. La aceleración en la superficie de la Tierra es $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Respuesta

En la superficie de la Tierra la fuerza gravitacional ejercida sobre el objeto de masa m es

$$F = mg = G \frac{mM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}, \quad (2.6)$$

donde M_{\oplus} es la masa de la Tierra, g es la aceleración de la gravedad sobre la superficie de la Tierra, G , la constante de gravitación universal y R_{\oplus} , el radio desde el centro de la Tierra a la superficie. Puesto que la masa es la misma, cuando el objeto de masa m se encuentra a una altura h por encima de la superficie de la Tierra, la fuerza gravitacional será

$$mg_1 = G \frac{mM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2}, \quad (2.7)$$

donde g_1 es el valor de la aceleración de la gravedad a la altura h . Para una altura h el valor de la aceleración de la gravedad ha cambiado, una condición para el problema es que el valor de $g_1 = g/10$, donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ para la superficie de la Tierra. De la ecuación (2.6) y la ecuación (2.7) podemos igualar el valor de las constantes para cada expresión; de tal forma que obtenemos

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R_{\oplus}^2}{(R_{\oplus} + h)^2}. \quad (2.8)$$

Sea $g_1/g = n$, entonces, de acuerdo a la última expresión (2.8), tenemos una

ecuación de segundo grado en terminos de h :

$$\begin{aligned} n(R_{\oplus} + h)^2 - R_{\oplus}^2 &= 0 \\ nR_{\oplus}^2 + 2R_{\oplus}hn + nh^2 - R_{\oplus}^2 &= 0 \\ h^2 + 2R_{\oplus}h + \left(R_{\oplus}^2 - \frac{R_{\oplus}^2}{n}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado para la incognita h , encontramos que

$$h = -R_{\oplus} \pm \frac{R_{\oplus}}{\sqrt{n}}.$$

Tenemos dos soluciones, sin embargo, como h tiene que ser mayor que cero ($h > 0$), habrá que tomar la solución que lleva signo +, es decir,

$$h = -R_{\oplus} + \frac{R_{\oplus}}{\sqrt{n}}. \quad (2.9)$$

En este caso, h será siempre positiva, puesto que n es siempre menor que uno. Así para nuestro caso particular, se tiene que $n = 1/10$,

$$\begin{aligned} h &= -R_{\oplus} + \frac{R_{\oplus}}{\sqrt{n}} \\ h &= -R_{\oplus} + \sqrt{10}R_{\oplus} \\ h &= -6\,378 \text{ km} + \sqrt{10}(6\,378 \text{ km}) \\ h &= 13\,791 \text{ km}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $g_1 = 0.98 \text{ m/s}^2$, es decir, un décimo del valor de la aceleración de la gravedad sobre la superficie de la Tierra, será necesario que el objeto se encuentre a una altura de 13 791 km por encima de la superficie de la Tierra.

2.9. Frío en el polo sur

La altitud del polo sur es mayor que la del polo norte, ¿en qué polo crees tú que haga más frío?, ¿por qué?

Respuestas

Durante el invierno en el hemisferio sur, el polo sur no recibe luz solar en lo absoluto y en verano el Sol, sin embargo, está todo el tiempo en una posición baja

en el cielo sobre el horizonte. Mucha de la luz solar que llega a la superficie es reflejada por la nieve. La falta de calor por el Sol, combinada con la altitud (3 200 *m*) provoca que el polo sur tenga uno de los climas más fríos del planeta. Las temperaturas en el polo sur son mucho menores que las del polo norte, porque el polo sur se localiza a una altitud en medio de masa continental y la temperatura de la atmósfera desciende entre 0.6°C y 1°C cada 100 *metros* de altura, mientras que el polo norte está al nivel del mar en la mitad del océano, que a su vez, actúa como reserva de calor.

2.10. Eclipse de Luna y de Sol

¿Qué diferencia hay entre un eclipse de Luna y uno de Sol? Explica cómo suceden.

Respuesta

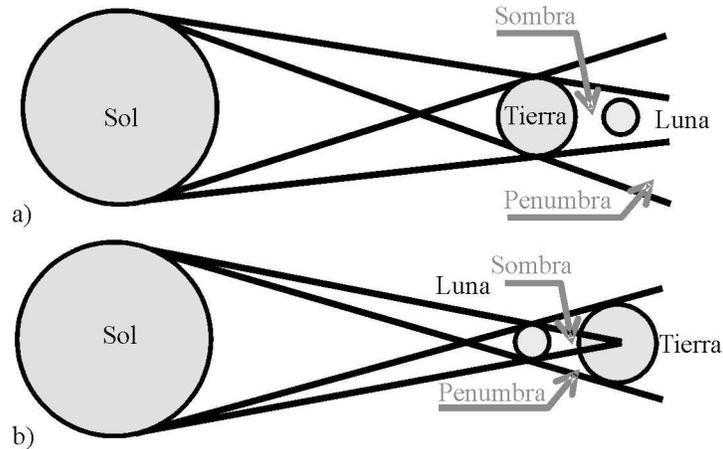


Figura 2.4: Un eclipse: a) de Luna se origina al interponerse la Tierra entre el Sol y la Luna; b) de Sol ocurre cuando la Luna se interpone entre el Sol y la Tierra.

Se produce un eclipse de Luna cuando ésta pasa por alguna parte de la sombra de la Tierra, estando los dos astros alineados con el Sol. En este caso, la Tierra se interpone entre el Sol y la Luna (Ver Figura 2.4 a). Necesariamente esta configuración se produce en el momento de la Luna llena y, en razón de la inclinación de la órbita lunar sobre la eclíptica. En principio, debería de haber un eclipse cada mes, justo cuando es Luna llena, pero no es así debido a que la órbita lunar está incli-

nada respecto al plano de la eclíptica, por lo que normalmente en cada Luna llena nuestro satélite se encuentra un poco por encima o por debajo del plano de la órbita terrestre, por lo que sólo se producen de uno a dos eclipses cada año. Un eclipse de Sol ocurre cuando la Tierra pasa a través de la sombra de la Luna (ver Figura 2.4 b). Es total solamente durante Luna nueva y cuando la Luna se encuentra entre el Sol y la Tierra, proyectando su sombra sobre la Tierra. Cuando un eclipse total de Sol ocurre, la sombra de la Luna cubre únicamente una pequeña porción de la Tierra, donde el eclipse es visible.

2.11. Eclipse de Luna

¿Puedes observar un **eclipse** de Luna cuando en el lugar en el que estás es mediodía? Explica por qué.

2.12. Luna llena

Se sabe que los **eclipses** de Luna sólo ocurren cuando es Luna llena. Explica por qué.

2.13. Eclipses de Sol

Se sabe que durante la Luna llena no pueden ocurrir **eclipses** de Sol. Explica por qué.

2.14. Observatorio Mauna Kea

El observatorio de Mauna Kea, Hawaii, situado a una altura de 4 025 *m* permite hacer observaciones astronómicas sin perturbaciones excesivas de la atmósfera. Las observaciones en el infrarrojo están limitadas por el vapor de agua y el dióxido de carbono. La **escala de altura** para el vapor de agua es de 13 *km* y para el dióxido de carbono es de 5 *km*. Determina en qué porcentaje se ha reducido la densidad en relación a la que hay a nivel del mar para

- a) Dióxido de carbono.
- b) Vapor de agua.

Capítulo 3

Sistema solar

3.1. Cálculo de la masa de la Tierra usando caída libre

Supongamos que queremos calcular la masa de la Tierra y que conocemos su radio y también la constante de gravitación universal, G . Para lograr nuestro objetivo nos subimos a un edificio cuya altura h medimos con precisión y resulta ser de 11.04 m . Desde esa altura soltamos una piedra y ésta tarda un tiempo $t = 1.5\text{ s}$ en caer al suelo. Calcula, con la información anterior, la masa de la Tierra.

Respuesta

Si conocemos h y t podemos conocer la aceleración (en la superficie terrestre) debida a la fuerza de gravedad de la Tierra, a partir de la siguiente ecuación:

$$h = \frac{1}{2}at^2, \quad (3.1)$$

donde a es la aceleración con la que cae la piedra. La aceleración es, por lo tanto,

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2(11.04\text{ m})}{(1.5\text{ s})^2} = 9.81\text{ m/s}^2.$$

La magnitud de la fuerza ($F = ma$) que produjo la aceleración es la ejercida sobre el objeto de masa m por la Tierra, cuya masa denotaremos por M ; entonces,

$$ma = \frac{GMm}{r^2}. \quad (3.2)$$

Despejando M tenemos que

$$M = \frac{ar^2}{G}.$$

Sustituyendo el radio de la Tierra ($r = 6\,370\text{ km}$), la aceleración ($a = 9.81\text{ m/s}^2$) y $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{ N m}^2/\text{kg}^2$ obtenemos que

$$M = 5.97 \times 10^{24}\text{ kg}.$$

3.2. Peso de un objeto en Marte

En los últimos años se han llevado a cabo proyectos para conocer mejor a Marte, nuestro planeta vecino. En un futuro, será posible enviar la primera misión tripulada. La masa de Marte es $M = 6.421 \times 10^{23}\text{ kg}$ y su radio es $R = 3\,397.2\text{ km}$.

- a) ¿Cuál es el valor de la aceleración gravitacional en la superficie de Marte?
- b) Si aquí, en la Tierra, una persona puede cargar (en su límite de fuerza) un bulto de cemento de 50 kg , ¿qué masa podría cargar estando en Marte?

Respuestas

a) Calculamos la aceleración en la superficie de Marte a partir de la igualdad entre la fuerza de gravedad y la expresión de la segunda ley de Newton:

$$G \frac{M m}{R^2} = m a, \quad (3.3)$$

donde G es la constante de gravitación y m es la masa del objeto. Despejando a de la ecuación anterior y ahora denotándola como g_M (por ser la aceleración en la superficie de Marte) tenemos que:

$$g_M = G \frac{M}{R^2}. \quad (3.4)$$

Sustituyendo valores, obtenemos que

$$g_M = 3.7\text{ m/s}^2.$$

Con ello vemos que g_M es menor a la aceleración en la superficie de la Tierra debida a la fuerza de gravedad (que es igual a 9.8 m/s^2 y que ahora vamos a denotar por g_T).

b) La magnitud del peso (ma) que puede cargar una persona en la Tierra y en Marte es el mismo, lo que varía es la masa que puede cargar. Entonces,

$$m' g_M = m g_T,$$

donde m' es la masa que la persona en cuestión, podría cargar en Marte. Por lo tanto,

$$m' = m \frac{g_T}{g_M}.$$

Sustituyendo valores obtenemos que en la superficie de Marte la persona dada podría cargar una masa de

$$m' = 132 \text{ kg}.$$

La cual es considerablemente mayor a la del bulto de cemento.

3.3. Rotación solar

El Sol, de manera similar a la Tierra, rota alrededor de su eje polar. La ubicación de las manchas que aparecen sobre la fotosfera (la capa del Sol que vemos a simple vista) se determina por una **latitud** (l) y una **longitud** (ψ). Las manchas solares permitieron estudiar detalladamente la rotación del Sol. La velocidad angular de rotación, en grados por día de las manchas, se puede expresar en función de la latitud mediante la siguiente ecuación:

$$w[^\circ/\text{día}] = 13.4 - 2.7(\text{sen } l)^2. \quad (3.5)$$

Basándote en esta ecuación, calcula

- a) El período de rotación del Sol en su ecuador.
- b) El período de rotación del Sol a una latitud de 40° .

Respuestas

a) El período de rotación para el ecuador lo obtenemos recordando que para el ecuador $l = 0^\circ$. Entonces la velocidad angular, para un punto sobre el ecuador, es

$$w = 13.4^\circ/\text{día}.$$

Por lo tanto, el período es igual a

$$T_{ec} = \frac{360^\circ}{13.4^\circ/\text{día}} = 26.9 \text{ días}.$$

- b) Para una latitud de 40° tenemos que $l = 40^\circ$, entonces,

$$w[^\circ/\text{día}] = 13.4 - 2.7(\text{sen } 40^\circ)^2 = 12.3 \text{ }^\circ/\text{día},$$

y el período es

$$T_{40^\circ} = \frac{360^\circ}{12.3^\circ/\text{día}} = 29.3 \text{ días.}$$

De los incisos a) y b) vemos que la máxima velocidad de rotación del Sol ocurre en el ecuador.

3.4. Pérdida de masa del Sol

El Sol está perdiendo masa continuamente, a una tasa de $10^{-14}M_\odot$ por año, en lo que se conoce como viento solar.

- a) Supongamos que la pérdida de masa es de $10^{-8}M_\odot$ por año. Si también suponemos que la distancia Tierra-Sol no cambia, haz una estimación del cambio anual que se produciría en el período orbital de la Tierra.
- b) ¿Sería válida esta última suposición?, ¿por qué?

Respuestas

a) De acuerdo con la tercera ley de Kepler, el período orbital de un planeta que gira alrededor del Sol está dado por

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}, \quad (3.6)$$

donde a es el semieje mayor de la elipse que describe el planeta en su órbita, G es la constante de la gravitación universal y M es la masa del Sol.

Para conocer el cambio del período orbital de la Tierra, en el sistema Tierra-Sol, vamos a derivar la expresión anterior respecto del tiempo:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \frac{dM}{dt} \frac{1}{M}.$$

Esto equivale a

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{2} T \frac{dM}{dt} \frac{1}{M}, \quad (3.7)$$

donde la tasa de pérdida de masa del Sol es $-\frac{dM}{dt} = 10^{-8}M_\odot$ por año.

Sustituyendo los valores del período orbital de la Tierra y de la masa del Sol en la ecuación (3.7) tenemos que la variación del período orbital es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} (1 \text{ año}) \frac{10^{-8} M_\odot \text{ año}^{-1}}{1 M_\odot}.$$

Simplificando:

$$\frac{dT}{dt} = 0.5 \times 10^{-8},$$

lo cual equivale a 0.3 *segundos* por año.

b) La distancia Tierra-Sol no es constante, por lo tanto dicha suposición no es válida. Aunque, en la práctica se utiliza como constante ya que los resultados de diversos cálculos usando dicho valor no difieren mucho de los valores considerandola variable.

3.5. Cálculo de la masa del Sol

Calcula la masa del Sol suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular con un radio aproximado de $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ y que el valor de la constante de gravitación universal es $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Respuesta

La tercera ley de Kepler relaciona la distancia de la Tierra al Sol, el período de la órbita terrestre y la masa del Sol. Bajo la condición de $M_{\oplus} \ll M_{\odot}$, tenemos que

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}. \quad (3.8)$$

Y, despejando la masa del Sol M_{\odot} ,

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}.$$

Dado el valor de $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, sustituyendo $r = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ y el período de la Tierra alrededor del Sol en unidades de segundos $T = 3.17 \times 10^7 \text{ s}$, tenemos:

$$M_{\odot} = \frac{4(3.14159)^2(1.5 \times 10^{11} \text{ m})^3}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(3.15 \times 10^7 \text{ s})^2} = 2.013 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

3.6. Movimiento de Io

El satélite Io describe una órbita circular de radio $r_{Io} = 422 \times 10^3 \text{ km}$ situada en el plano de la órbita de Júpiter alrededor del Sol. Sabiendo que el período de revolución de Io es de 1.769 *días* y que el radio de Júpiter es de $R_J = 71\,492 \text{ km}$,

determina el tiempo que Io permanece en la sombra del planeta Júpiter.

Respuesta

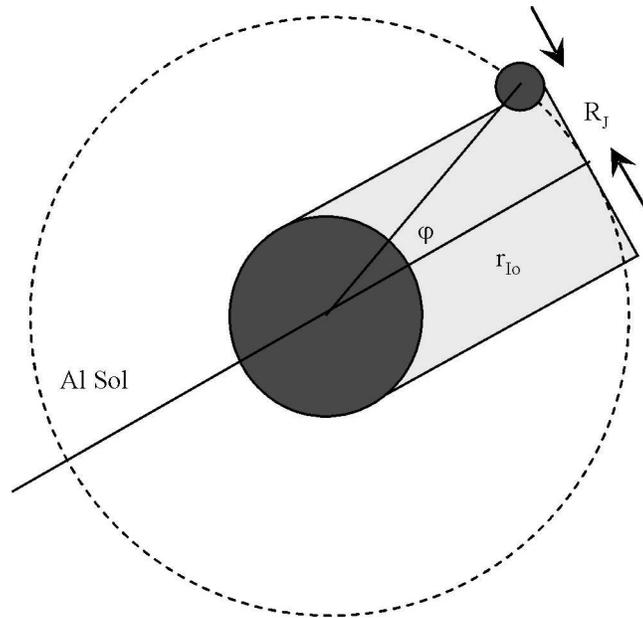


Figura 3.1: Trayectoria de Io a través de la sombra de Júpiter.

La anchura de la sombra es igual al diámetro de Júpiter, cuyo radio es de $R_J = 71\,492\text{ km}$. El desplazamiento angular φ de Io en la sombra del planeta Júpiter es

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{71\,492\text{ km}}{422\,000\text{ km}}$$

$$\varphi \approx 0.169\text{ rad.}$$

Sabiendo que la velocidad angular de Io es el cociente entre 2π (una vuelta) y el periodo de revolución $T_{Io} = 42.456\text{ hrs}$, el tiempo que Io permanece en la sombra del planeta Júpiter se determina a partir de

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{y} \quad t = \frac{\theta}{\omega};$$

combinando ambas ecuaciones se determina el tiempo a partir del desplazamiento

φ y el período T_{Io} :

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\theta T_{Io}}{2\pi}$$

$$t = \frac{2\varphi T_{Io}}{2\pi} = \frac{(2)(0.169 \text{ rad})(42.456 \text{ hrs})}{2\pi}$$

$$t = 2.28 \text{ hrs.}$$

3.7. Movimiento de la Tierra y Júpiter

La Tierra y Júpiter se mueven en órbitas aproximadamente circulares alrededor del Sol. El radio de la órbita de la Tierra es $R_T = 1 \text{ UA}$ y el radio de la órbita de Júpiter es $R_J = 5.203 \text{ UA}$. Con base en la Figura 3.2, determina

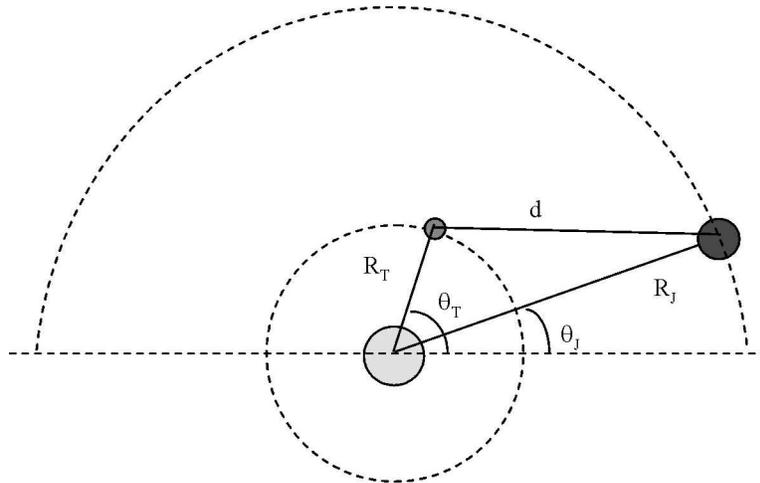


Figura 3.2: Movimiento de la Tierra y Júpiter alrededor del Sol.

- La distancia d entre los centros de ambos planetas en función de R_T y R_J y los ángulos formados con la horizontal θ_T y θ_J .
- La mínima distancia entre ambos planetas.
- En cierto instante de tiempo, la posición de la Tierra se encuentra de manera tal que $\theta_T = \pi$ y $\theta_J = 15.2^\circ$; determina la distancia entre los planetas Tierra y Júpiter para ese tiempo.

Respuestas

a) Establecemos un sistema de referencia con origen en el Sol. La posición de la Tierra en el instante t es $(R_T \cos \theta_T, R_T \sin \theta_T)$. La posición de Júpiter en el instante t es $(R_J \cos \theta_J, R_J \sin \theta_J)$. La distancia d entre los centros de ambos planetas, a partir de la ecuación de la distancia para dos puntos en el plano, está dada por

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \\ d &= \sqrt{(R_J \sin \theta_J - R_T \sin \theta_T)^2 + (R_J \cos \theta_J - R_T \cos \theta_T)^2}. \end{aligned}$$

b) La mínima distancia, en el instante $t = 0$, cuando $\theta_T = 0$, $\theta_J = 0$ es

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(R_J \sin \theta_J - R_{\oplus} \sin \theta_T)^2 + (R_J \cos \theta_J - R_T \cos \theta_T)^2} \\ d &= \sqrt{(5.203 \text{ UA} \sin 0 - 1 \text{ UA} \sin 0)^2 + (5.203 \text{ UA} \cos 0 - 1 \text{ UA} \cos 0)^2} \\ d &= 4.203 \text{ UA}. \end{aligned}$$

c) La distancia entre la Tierra y Júpiter va aumentando, medio año después la Tierra se encuentra en la posición $\theta_T = \pi$. Júpiter debido a su menor velocidad angular, se encuentra en $\theta_J = 15.2^\circ$. La distancia entre la Tierra y Júpiter en dicho instante es

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(R_J \sin \theta_J - R_T \sin \theta_T)^2 + (R_J \cos \theta_J - R_T \cos \theta_T)^2} \\ d &= \sqrt{[5.203 \sin(0.264) - 1 \sin(\pi)]^2 + [5.203 \cos(0.264) - 1 \cos(\pi)]^2} \\ d &= 6.17 \text{ UA}. \end{aligned}$$

3.8. Área que recorre Plutón alrededor del Sol

Las trayectorias descritas por los planetas en sus órbitas alrededor del Sol son elipses. Si la ecuación de una elipse, en coordenadas cartesianas, está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a es el semieje mayor y b es el semieje menor.

- a) Demuestra que el área encerrada por la elipse es $A = \pi ab$, donde a y b representan el semieje mayor y semieje menor respectivamente.
- b) Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Si el semieje menor b es igual a 38.24 UA y su período alrededor del Sol es 248 años , determina el área que cubre plutón al completar su período.

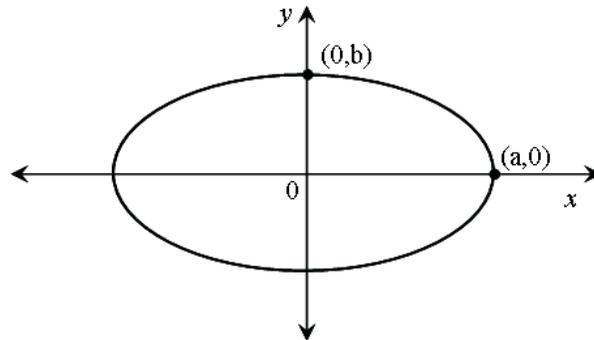


Figura 3.3: Trayectoria elíptica descrita por algunos planetas alrededor del Sol.

Respuestas

a) Al despejar y de la ecuación de la elipse, resulta

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \\ y^2 &= b^2 \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2} \right) \\ y &= \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.\end{aligned}$$

Como la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes, el área total, A , es cuatro veces el área en el primer cuadrante. La parte de la elipse que queda en el primer cuadrante está expresada por la función

$$\begin{aligned}y &= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad 0 \leq x \leq a, \\ \text{y así } A &= \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.\end{aligned}$$

A fin de evaluar esta integral hacemos la sustitución $x = a \sin \theta$. Entonces, $dx = a \cos \theta d\theta$. Para cambiar los límites de integración, observamos que cuando $x = 0$, $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$; cuando $x = a$, $\sin \theta = 1, \Rightarrow \theta = \pi/2$. Por otra parte:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta.$$

Sustituyendo este último termino en la integral, tenemos que

$$\begin{aligned}
 A &= 4\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4\frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 4ab \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= 2ab \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 2ab \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right] \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \pi ab.
 \end{aligned}$$

Hemos demostrado que el área de una elipse cuyos semiejes son a y b es πab .

b) Para conocer el área que barre Plutón al completar su período orbital en 248 años, es necesario conocer la distancia media (la longitud del radio mayor de la elipse). Partiendo de la tercera ley de Kepler determinamos el valor del radio mayor:

$$\begin{aligned}
 T^2 &= a^3 \\
 a &= \sqrt[3]{T^2} \\
 a &= \sqrt[3]{(248 \text{ año})^2} \\
 a &= 39.47 \text{ UA}.
 \end{aligned}$$

El área que cubre plutón alrededor del Sol se determina a partir de

$$\begin{aligned}
 A &= \pi ab \\
 A &= \pi(39.47 \text{ UA})(38.24 \text{ UA}) \\
 A &= 4741.70 \text{ UA}^2
 \end{aligned}$$

Es decir, Plutón cubre un área de 4741.7 UA^2 en 248 años.

3.9. Perímetro de los planetas y algunos cometas

La trayectoria descrita por algunos cometas y planetas está dada por la ecuación de la elipse. Dicha ecuación puede ser de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Con base en lo anterior, demuestra que el perímetro para cada uno de ellos es de la forma:

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

donde ϵ^2 es la excentricidad de la elipse ($\epsilon = c/a$, con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y $a > b > 0$).

Respuesta

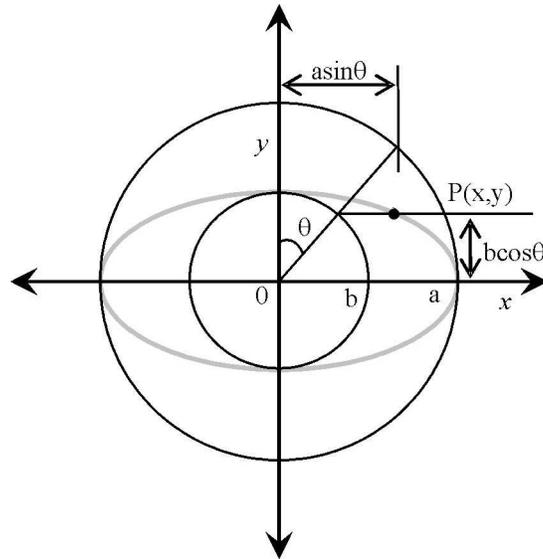


Figura 3.4: Las coordenadas para el punto $P(x,y)$ en coordenadas polares son $x = a \sin \theta$ e $y = b \sin \theta$.

De la Figura 3.4, las ecuaciones paramétricas que describen el punto $P(x,y)$ sobre la elipse son

$$x = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = a \sin \theta \quad y = b \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = b \cos \theta.$$

Por otra parte, la ecuación paramétrica para hallar la longitud de arco a lo largo de la curva se define como

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta. \quad (3.9)$$

Por lo tanto, si la curva del primer cuadrante es simétrica con respecto a los otros tres cuadrantes (ver Figura 3.4), sólo será necesario calcular el perímetro o la longitud de arco a lo largo del primer cuadrante y multiplicar ésta por cuatro, res-

tringiendo la variación $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Así,

$$\begin{aligned} x &= a \sin \theta & y &= b \cos \theta \\ \frac{dx}{d\theta} &= a \cos \theta & \frac{dy}{d\theta} &= -b \sin \theta \\ \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 &= a^2 \cos^2 \theta & \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= b^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la definición (3.9) se tiene que

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ L &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ L &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Y utilizando la identidad $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$,

$$\begin{aligned} L &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \theta} d\theta \\ L &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{a^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \theta} d\theta \\ L &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Definiendo $\epsilon^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, finalmente se tiene que

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

3.10. Velocidad de rotación

¿La velocidad de rotación de la Tierra es más grandes en los polos que en el **ecuador** terrestre? ¿Por qué?

Respuestas

La rotación es el movimiento que realiza la Tierra girando sobre su propio eje de Oeste a Este. Da una vuelta completa en 24 *hrs* que constituyen nuestro día completo. El hombre no percibe en forma física directa la rotación ya que la atmósfera acompaña al planeta en su movimiento, pero se puede notar observando al Sol y las estrellas. La velocidad de rotación no es la misma en todos los puntos del planeta. Los puntos situados en el ecuador se mueven recorriendo una distancia de 1665 *km* en cada hora. A medida que nos alejamos del ecuador hacia los polos nuestra velocidad disminuye hasta que es prácticamente cero, debido a que se recorre una distancia menor para cada latitud. Así, para Puebla la velocidad de rotación es de 1576 *km/h*, la cual corresponde a una latitud de 19° aproximadamente; para una latitud de 60° es de 850 *km/h* y para los polos es nula.

3.11. ¿Por qué el Ecuador?

Se dice que una órbita circular o elíptica de un satélite artificial es estable cuando ésta corta la esfera terrestre en un círculo máximo. ¿Por qué en otro caso no sería estable?

3.12. La Tierra y nuestro peso

Supongamos que el tamaño de la Tierra aumentara en un factor de 2.

- a) ¿Qué pasaría con nuestro peso?
- b) ¿Y si fuera la masa de la Tierra la que se duplicara?
- c) ¿Y si se duplican tanto el tamaño como la masa?
- d) ¿Y si lo que hacemos es subir a un edificio que tenga de altura el radio de la Tierra?

3.13. ¿Por qué Mercurio sólo se ve al atardecer o al amanecer?

En la Figura 3.5 tenemos una representación de las órbitas de Mercurio y de la Tierra.

- a) ¿Por qué Mercurio se ve sólo al atardecer o al amanecer?

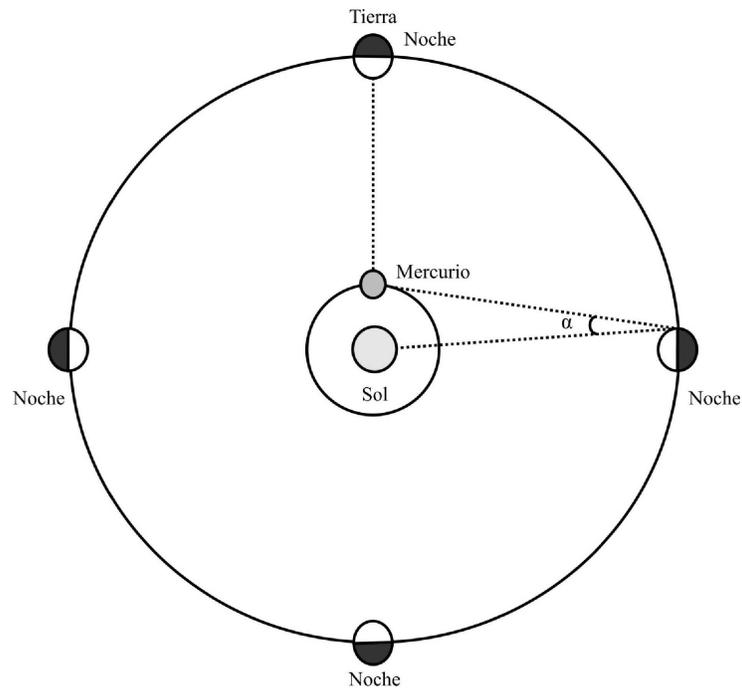


Figura 3.5: Órbitas de Mercurio y de la Tierra.

- b) ¿Qué planetas se ven preferentemente alrededor de esas horas?
- c) ¿El o los planetas restantes se pueden ver a cualquier hora?, ¿por qué?

3.14. Órbita de Júpiter alrededor del Sol

La distancia media del Sol a Júpiter es 5.2 UA . Por otro lado, la distancia media de la Tierra al Sol es de 1 UA y el período de la Tierra alrededor del Sol es de 1 año , ¿cuál es el período de la órbita de Júpiter alrededor del Sol?

Capítulo 4

Mecánica celeste

4.1. Satélite estacionario

Un satélite orbitando sobre el ecuador puede encontrarse siempre sobre un mismo lugar (satélite estacionario). Calcula la altura a la que debe estar un satélite para que esto ocurra.

Respuesta

Como la masa del satélite (m) es muy pequeña en comparación a la masa de la Tierra ($m \ll M_{\oplus}$), entonces, tenemos una situación en la que la expresión de la tercera ley de Kepler puede quedar solamente en términos de la masa del objeto central, es decir,

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G M_{\oplus}}{4\pi^2}. \quad (4.1)$$

Despejando, tenemos que:

$$r = \left(\frac{T^2}{4\pi^2} G M_{\oplus} \right)^{1/3}. \quad (4.2)$$

Sustituyendo $T = 24 \text{ horas} = 86\,400 \text{ s}$, resulta que la distancia desde el centro de la Tierra hasta el satélite es $r = 42\,240 \text{ km}$. Como el radio de la Tierra es de $6\,378 \text{ km}$, la distancia desde la superficie de la Tierra hasta el satélite es

$$d = 35\,883 \text{ km} \approx 36\,000 \text{ km}.$$

4.2. Estación espacial como ciudad

Se quiere construir lejos de la Tierra una estación espacial en forma de rueda o cilindro de 2 km de radio y 2 km de altura. La gente viviría en la superficie interna del cilindro.

- ¿Qué habría que hacer para que los habitantes no advirtieran la ausencia de gravedad y se sintieran casi como en la Tierra?
- ¿Se necesitaría mucha energía para mantener esa gravedad artificial? Haz una estimación de cuánta gente podría vivir en la estación espacial.

Respuestas

a) Si el cilindro se pone en rotación, la gente notará la fuerza centrípeta como si fuera gravedad. Para que fuera como en la Tierra, la fuerza centrípeta debería cumplir con que

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_{\oplus}m}{R_T^2} = m \times (9.8\text{ m/s}^2),$$

donde r es el radio del cilindro y v , su velocidad de rotación.

Despejando y realizando operaciones tenemos que $v = 140\text{ m/s}$ y como $v = \frac{2\pi r}{T}$, entonces la estación tendría que dar una vuelta en un período, T :

$$\frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 2[\text{km}]}{140[\text{m s}^{-1}]} = 90\text{ s}.$$

b) En principio, por la conservación del momento angular, no haría falta mucha energía. Bastaría con la necesaria para que el cilindro empiece a rotar y para, de vez en cuando, corregir la velocidad de rotación si hay algún problema o un choque con algún objeto.

Sólo se podría habitar la zona curva del cilindro cuya área es $2\pi r l = 2.5 \times 10^7\text{ m}^2$ (25 km^2). Si asignamos 200 m^2 por persona, incluyendo áreas comunes, entonces podrían vivir en ella unas 125 000 personas.

4.3. Período de un cometa y su distancia al Sol

Supongamos que cada año, en tu cumpleaños, ves un objeto en el cielo y éste se mueve de un año a otro 1.02° sobre la bóveda celeste. Este movimiento aparente tan rápido parece indicar que el objeto pertenece al Sistema solar.

- Calcula el radio de la órbita del objeto, alrededor del Sol, suponiendo que su masa es muy pequeña en relación a la masa del Sol.

b) ¿Qué tipo de objeto podría ser?

Respuestas

a) De acuerdo con la tercera ley de Kepler, y considerando que $m \ll M$, tenemos que

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_{\odot}}} a^{3/2}. \quad (4.3)$$

El objeto se ha movido en la esfera celeste 1.02° en 1 *año*. Entonces, el tiempo T que tardaría en recorrer los 360° es

$$T = \frac{360^{\circ}}{1.02^{\circ}} (1 \text{ año}) = 352.94 \text{ años}.$$

Por otro lado, de la ecuación (4.3), tenemos que

$$a = \left(\frac{GM_{\odot}}{(2\pi)^2} \right)^{1/3} T^{2/3}.$$

Transformamos el período a *segundos*, $T = 352.94 \text{ años} = 1.11 \times 10^{10} \text{ s}$, y sustituyendo los valores resulta que el radio de la órbita es

$$a = \left(\frac{6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2 \times 1.98 \times 10^{33} \text{ g}}{(2\pi)^2} \right)^{1/3} \times (1.11 \times 10^{10} \text{ s})^{2/3} = 49.9 \text{ UA}.$$

Una solución más directa se obtiene de la tercera ley de Kepler en *UA* y en *años*, $T^2 = a^3$. Si $T = 352.49 \text{ años}$, entonces resulta que $a = (352.49)^{2/3} = 49.9 \text{ UA}$.

b) El objeto parece ser un cometa de período largo, ya que está más allá de la órbita de Plutón.

4.4. Caída de meteoritos a la Tierra

Consideremos al sistema Tierra-Sol en una situación ideal en la que caen meteoritos uniformemente distribuidos sobre toda la superficie de la Tierra, y (sólo para el propósito de esta pregunta) supongamos que el ángulo de incidencia de los meteoritos es 90° sobre la superficie. Si suponemos que el promedio anual de meteoritos sobre la Tierra es de $2.2 \times 10^8 \text{ kg}$, que la Tierra es una esfera de densidad uniforme y que los meteoritos tienen la misma densidad que la Tierra.

a) Calcula el nuevo período de rotación que tendría la Tierra después de 5 *años*.

b) Calcula el nuevo período de traslación que tendría la Tierra después de 3 años.

Respuestas

a) Como supusimos que los meteoritos han caído en forma radial sobre la superficie de la Tierra, entonces no producen un cambio neto en el momento angular de la Tierra. Por conservación de momento angular tenemos que

$$L_i = L_f. \quad (4.4)$$

El momento angular, L , se define como el producto del momento de inercia, I , y la velocidad angular, w . El momento angular inicial, L_i , corresponde al momento de inercia y a la velocidad angular iniciales mientras que el momento angular final, L_f , al momento de inercia y a la velocidad angular finales,

$$L_i = I_i w_i = I_f w_f = L_f. \quad (4.5)$$

Para calcular el momento de inercia de la Tierra, que es un cuerpo sólido con densidad constante, ρ , partimos de la expresión general para el momento de inercia:

$$I = \int r^2 dm, \quad (4.6)$$

donde

$$dm = \rho dV. \quad (4.7)$$

El elemento de volumen dV está a una distancia $r \sin \theta$ desde el eje de rotación. Con esta condición y sustituyendo la ecuación (4.7) en la ecuación (4.6) tenemos que

$$I = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho (r \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta,$$

y simplificando de manera sucesiva resulta:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R dr \int_\pi^0 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi \rho r^4 (1 - \cos^2 \theta) \\ I &= \rho 2\pi \frac{R^5}{5} \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_\pi^0 \\ I &= \frac{2\pi \rho R^5}{5} \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2, \quad (4.8)$$

con $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Sustituyendo la ecuación (4.8) en la ecuación (4.5) tenemos que

$$\frac{2}{5}M_i R_i^2 \left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = \frac{2}{5}M_f R_f^2 \left(\frac{2\pi}{T_f}\right).$$

Simplificando resulta que

$$\frac{M_i R_i^2}{T_i} = \frac{M_f R_f^2}{T_f},$$

de donde vemos que T_f es

$$T_f = T_i \frac{M_f R_f^2}{M_i R_i^2}. \quad (4.9)$$

Como suponemos constante la densidad de la Tierra y la podemos expresar en términos de

$$\rho = \frac{M_i}{\frac{4}{3}\pi R_i^3} = \frac{M_f}{\frac{4}{3}\pi R_f^3}, \quad (4.10)$$

resulta que

$$\frac{M_i}{R_i^3} = \frac{M_f}{R_f^3}. \quad (4.11)$$

Despejando R_f de la ecuación (4.11) y sustituyendo en la ecuación (4.9) se tiene que,

$$T_f = T_i \frac{M_f}{M_i R_i^2} \left(\frac{M_f}{M_i}\right)^{\frac{2}{3}} R_i^2,$$

y simplificando:

$$T_f = T_i \left(\frac{M_f}{M_i}\right)^{\frac{5}{3}}.$$

Finalmente, encontramos la expresión de T_f como

$$T_f = T_i \left(1 + \frac{\Delta M}{M}\right)^{\frac{5}{3}}, \quad (4.12)$$

donde ΔM es la cantidad de masa depositada por los meteoritos después de 5 años, por lo que $\Delta M = 5 \times 2 \times 2 \times 10^8 \text{ kg} = 11 \times 10^8 \text{ kg}$. La masa de la Tierra es $M = 5.97 \times 10^{27} \text{ g}$ y $T_i = 24 \text{ hrs}$. Así que, de la ecuación (4.12), resulta que el nuevo período orbital será

$$T_f = 24(1 + 1.84 \times 10^{-16})^{5/3} \text{ hrs}.$$

De manera aproximada tenemos que

$$T_f \approx 24(1 + 3.06 \times 10^{-16}) \text{ hrs.}$$

Es decir, el período final es mayor al inicial en una cantidad despreciable.

b) Debido a que no hay fuerzas externas que afecten el movimiento, tenemos que, por conservación de momento angular, ecuación (4.5), $L = I\omega = \text{constante}$. En este caso podemos tomar al sistema Tierra-Sol como dos cuerpos puntuales en donde la Tierra, cuya masa es M , está a una distancia r del Sol. La masa final de la Tierra es M_f , así que

$$I\omega = M \frac{2\pi}{T} = M_f \frac{2\pi}{T_f} = \text{constante}. \quad (4.13)$$

El nuevo período de traslación, T_f , resulta ser

$$T_f = T \frac{M_f}{M} = T \left(1 + \frac{\Delta M}{M} \right),$$

donde T es el viejo período traslacional de 1 *año*, ΔM es el incremento de masa después de 3 *años* ($\Delta M = 3 \times 2.2 \times 10^8 \text{ kg}$) y $M = 5.97 \times 10^{27} \text{ g}$, es la masa de la Tierra. Entonces, el nuevo período de traslación, T_f , es

$$T_f = 1(1 + 1.10 \times 10^{-16}) \text{ años.}$$

Es decir, el incremento en el período de traslación también es despreciable.

4.5. Distancias mínima y máxima en una órbita elíptica

Supongamos que un cuerpo de masa m gira, describiendo una elipse, en torno a otro de masa M debido a la fuerza gravitacional de este. La masa m es despreciable en comparación a la masa M y, por lo tanto, el objeto de masa M está en el foco de la elipse.

- Si la excentricidad de la órbita es ϵ y el semieje mayor es a , demuestra que la distancia mínima es $d_m = a(1 - \epsilon)$ y la máxima es $d_M = a(1 + \epsilon)$.
- La excentricidad de Plutón es de 0.25 y, en el **afelio**, la distancia de Plutón al Sol es de $\approx 29 \text{ UA}$. ¿En qué porcentaje es mayor la distancia máxima de Plutón al Sol en relación a la distancia mínima? ¿Cuál es la distancia máxima de Plutón al Sol en UA ?

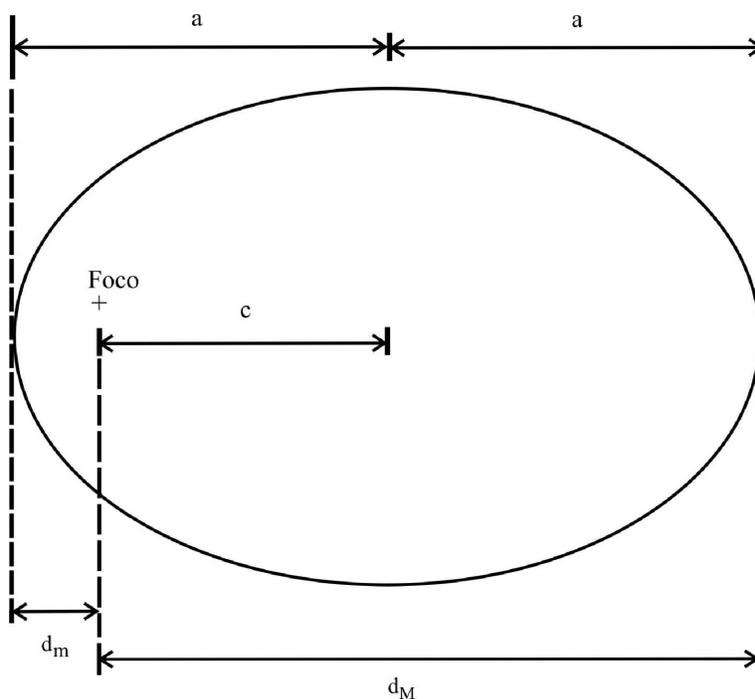


Figura 4.1: Distancias mínima y máxima a un foco de la elipse.

Respuestas

a) De acuerdo con la Figura 4.1, la distancia mínima es

$$d_m = a - c. \quad (4.14)$$

Por otro lado, la excentricidad es

$$\epsilon = \frac{c}{a}, \quad (4.15)$$

y entonces,

$$d_m = a - \epsilon a = a(1 - \epsilon).$$

De manera similar, encontramos la distancia máxima:

$$d_M = a + c = a + \epsilon a = a(1 + \epsilon).$$

b) Para calcular el porcentaje en que es mayor la distancia máxima de Plutón al Sol, en relación a la mínima, usamos el cociente de estas distancias:

$$\frac{d_M}{d_m} = \frac{a(1 + \epsilon)}{a(1 - \epsilon)} = \frac{(1 + \epsilon)}{(1 - \epsilon)}.$$

Sustituyendo valores tenemos que

$$\frac{d_M}{d_m} = \frac{1 + 0.25}{1 - 0.25} = 1.67.$$

Es decir, la distancia máxima es $\sim 67\%$ mayor que la distancia mínima. Como $d_m = 29 \text{ UA}$, entonces, la distancia máxima es $d_M = 29 \times 1.67 = 49 \text{ UA}$.

4.6. Asteroide en disco de polvo

Consideremos una **estrella** cuya masa es igual a la masa del Sol, $M_\star = M_\odot$, y que tiene un disco de polvo alrededor. Supongamos que el polvo consiste en granos cuyo diámetro es $\phi = 10^{-6} \text{ m}$ y que la densidad numérica del polvo es $n_p = 10^5 \text{ granos/m}^3$. También vamos a suponer que un asteroide de 1 km de diámetro está orbitando la estrella a una distancia de 40 UA .

- Usa las **leyes de Kepler** para calcular la velocidad orbital del **asteroide** alrededor de la **estrella**.
- Supongamos que el asteroide está viajando a través del polvo con la velocidad calculada anteriormente. Vamos a suponer que los granos de polvo y el asteroide tienen la misma densidad (3000 kg/m^3). Calcula la rapidez con la cual el radio del asteroide crece debido a la **acreción** de polvo.
- Usando los resultados anteriores, calcula el tiempo que le tomaría al asteroide duplicar su radio.

Respuestas

a) Aplicando la tercera ley de Kepler se tiene que el período T , en *años*, viene dado por $T^2 = a^3$, donde a es el semieje mayor de la elipse, en UA . Si $a = 40 \text{ UA}$, entonces $T = 252.98 \text{ años} = 7.97 \times 10^9 \text{ s}$. Por otro lado, la velocidad tangencial (v) en un movimiento circular está dada por

$$v = \frac{2\pi a}{T}. \quad (4.16)$$

Por lo tanto,

$$v = 4.69 \text{ km/s.}$$

b) Para calcular la rapidez con la cual aumenta el radio del asteroide consideremos el caso en el que la densidad del asteroide, ρ_* , es constante respecto del tiempo, pero no así su masa, M , ni su radio, R . La densidad está dada por

$$\rho_* = \frac{M}{V}, \quad (4.17)$$

donde V es el volumen del asteroide. Derivando respecto del tiempo tenemos que

$$\frac{d\rho_*}{dt} = \frac{\frac{dM}{dt}}{\frac{4}{3}\pi R^3} - \frac{3M}{\frac{4}{3}\pi R^4} \frac{dR}{dt} = 0,$$

ya que la densidad es constante a través del tiempo. Por lo tanto,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{3M}{R} \frac{dR}{dt}. \quad (4.18)$$

Por otro lado, debido a la acreción de polvo en el asteroide (donde ρ es la densidad de la nube de polvo), éste aumenta de radio. La cantidad de masa que se acreta en el asteroide por unidad de tiempo es

$$\frac{dM}{dt} = \rho A_{area} v = \rho 4\pi R^2 v, \quad (4.19)$$

donde, A_{area} es la superficie del asteroide y v es la velocidad tangencial. Igualando la ecuación (4.18) con la ecuación (4.19) y recordando, de la ecuación (4.17), que la masa del asteroide es

$$M = \rho_* \frac{4}{3}\pi R^3,$$

y tenemos que

$$\rho 4\pi R^2 v = \frac{3\rho_* \frac{4}{3}\pi R^3}{R} \frac{dR}{dt}.$$

Por lo tanto, la rapidez con la que crece el radio del asteroide es

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\rho}{\rho_*} v. \quad (4.20)$$

En la ecuación anterior el cociente ρ/ρ_* determina la rapidez con la que crece el asteroide. Entonces debemos conocer ρ en función de la densidad de un grano de polvo, que es igual a la densidad del asteroide.

Debido a que la nube de polvo consiste en granos cuyo diámetro es $\phi = 10^{-6} m$ y que hay 10^5 granos por metro cúbico, entonces la densidad de la nube de polvo, ρ , es

$$\rho = \frac{4}{3}\pi(\phi/2)^3 \rho_p n_p, \quad (4.21)$$

donde ρ_p es la densidad de un grano de polvo. Sustituyendo la ecuación (4.21) en la ecuación (4.20) tenemos que

$$\frac{dR}{dt} = \frac{4}{3}\pi(\phi/2)^3 \frac{\rho_p}{\rho_*} n_p v.$$

Como la densidad del asteroide (ρ_*) es igual a la densidad del grano de polvo (ρ_p) se obtiene que

$$\frac{dR}{dt} = \frac{4}{3}\pi(\phi/2)^3 n_p v.$$

Sustituyendo los valores de ϕ ($10^{-6} m$) y v ($4.69 km/s$) obtenemos la rapidez con la que crece el asteroide; la cual es

$$\frac{dR}{dt} = 2.45 \times 10^{-13} km/s.$$

c) A partir de la diferencial $\frac{dR}{dt}$ podemos expresar el radio como función del tiempo. Para calcular el tiempo que le toma al asteroide duplicar su radio, tenemos que integrar desde R_o hasta $2R_o$.

$$\int_{R_o}^{2R_o} dR = \frac{4}{24}\pi\phi^3 n_p v \int_0^t dt. \quad (4.22)$$

El tiempo que le tomará al asteroide duplicar su radio inicial $R_o = 0.5 km$ es

$$t = \frac{6 R_o}{\pi\phi^3 n_p v} = 2 \times 10^{12} s = 6.3 \times 10^4 \text{ años.}$$

4.7. Cálculo de las masas de un sistema binario

Si nuestros ojos pudiesen ver en rayos X en lugar de ver en el rango visible, tendríamos una visión del cielo muy diferente a la cotidiana. En ese caso veríamos principalmente algunos cientos de **estrellas** muy brillantes, la mayoría concentradas en el centro de nuestra **galaxia**. Una gran parte de estas estrellas son sistemas binarios de rayos X, donde un hoyo negro o una **estrella de neutrones** está devorando el material de la estrella compañera.

El estudio de un sistema binario nos permite determinar las masas de los objetos que lo componen. En el caso de las binarias de rayos X, las masas determinadas para los objetos compactos son consistentes con las masas de las estrellas de neutrones ($\sim 1.4 M_{\odot}$) o con las de hoyos negros (masas mayores a $1.4 M_{\odot}$).

Supongamos que se encuentra un sistema binario de rayos X en el cual la estrella visible es una gigante roja y, a partir de su tipo espectral, se estima que tiene una masa igual a 12 veces la masa del Sol. El período orbital es de 3.65 *días*, y el semieje mayor es igual a 0.12 *UA*.

- a) Calcula la suma de las masas mediante la **tercera ley de Kepler**.
- b) ¿La compañera compacta es una estrella de neutrones o un hoyo negro?

Respuestas

- a) De la tercera ley de Kepler tenemos que

$$(m_1 + m_2) = a^3/T^2, \quad (4.23)$$

con a en unidades astronómicas, T en *años*, m_1 y m_2 en M_{\odot} ; entonces,

$$m_1 + m_2 = (0.12)^3/(0.01)^2.$$

Simplificando, resulta que la suma de las masas es

$$m_1 + m_2 = 17.28M_{\odot}.$$

- b) De la ecuación anterior despejamos m_2 :

$$m_2 = 17.28M_{\odot} - m_1,$$

y sustituyendo el valor de m_1 obtenemos el valor de

$$m_2 = 17.28 M_{\odot} - 12 M_{\odot} = 5.28M_{\odot}.$$

Por lo tanto, la compañera de la gigante roja es un hoyo negro.

4.8. Período de rotación del telescopio Hubble

El telescopio espacial Hubble, libre de los efectos de absorción de la atmósfera terrestre, gira en órbita circular a 599 *km* por encima de la superficie terrestre. Si el radio de la Tierra es de 6 378 *km*, el período de la Luna es de 27.3 *días* y la órbita de la Luna es casi circular con un radio de 384 401 *km*. Encuentra el período de

rotación con el cual gira dicho telescopio alrededor de la Tierra.

Respuesta

En cualquier órbita circular de radio r , un satélite terrestre de masa m , tiene una velocidad v y, por lo tanto, un período $T = 2\pi r/v$. La fuerza centrípeta necesaria para que el telescopio se mueva en un círculo la provee la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra; partiendo de esto,

$$\begin{aligned} F_g &= F_c \\ G \frac{M_{\oplus} m}{r^2} &= \frac{mv^2}{r} \\ G \frac{M_{\oplus}}{r^2} &= \frac{4\pi^2 r^2}{rT^2} \\ G \frac{M_{\oplus}}{4\pi^2} &= \frac{r^3}{T^2}, \end{aligned}$$

donde G es la constante universal, M_{\oplus} es la masa de la Tierra, r es la distancia del centro de masa de la Tierra y el telescopio Hubble y T es el período de rotación de dicho telescopio. Por otra parte, aplicado el mismo argumento a la Luna, de masa M_L , que se mueve en un círculo de radio R alrededor de la Tierra y período T_L , se obtiene que

$$\begin{aligned} F_g &= F_c \\ G \frac{M_{\oplus} M_L}{R^2} &= \frac{M_L v^2}{R} \\ G \frac{M_{\oplus}}{4\pi^2} &= \frac{R^3}{T_L^2}. \end{aligned}$$

Ambas condiciones se cumplen para el sistema Tierra-telescopio y Tierra-Luna, por lo tanto, igualando ambas constantes se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{r^3}{T^2} &= \frac{R^3}{T_L^2} \\ T &= T_L \sqrt{\frac{r^3}{R^3}}. \end{aligned}$$

Considerando que el radio, r , es la distancia del centro de la Tierra al telescopio, y sí se tiene que $r = R_{\oplus} + 599 \text{ km} = 6\,977 \text{ km}$, el período de rotación de la Luna alrededor de la Tierra es $T_L = 27.3 \text{ días} = 39\,312 \text{ min}$ y que $R_L = 384\,401 \text{ km}$ es

la distancia entre los centros de gravedad Tierra-Luna. Apartir de estas consideraciones,

$$T = (39\,312 \text{ min}) \sqrt{\frac{(6\,977 \text{ km})^3}{(384\,401 \text{ km})^3}}$$

$$T = 96.12 \text{ min.}$$

Por lo tanto, el telescopio espacial se halla en una órbita de 599 km sobre la superficie de la Tierra completando un período $\approx 96 \text{ min}$. Como datos adicionales, el telescopio Hubble mide 13 m de largo y tiene una masa de $11\,600 \text{ kg}$ y se encuentra girando a una velocidad aproximada $v \approx 27\,364.4 \text{ km/h}$.

4.9. Velocidad angular de Júpiter

Júpiter es un planeta gaseoso que, además, gira rápidamente sobre su propio eje; se cree que debido a esto, la superficie que vemos está formada por bandas de diferentes colores.

- Calcula la velocidad angular de cualquier punto de Júpiter debido a su rotación.
- El período de rotación de Júpiter sobre su propio eje es de 9 hrs y 55 min y su radio ecuatorial es de $71\,492 \text{ km}$. Calcula la velocidad tangencial y la aceleración centrípeta de un punto, P , sobre la superficie de Júpiter situado en un lugar de 60° de **latitud**.
- Los cálculos anteriores se hacen bajo la suposición de que Júpiter es una esfera. ¿Crees que la forma de Júpiter sea esférica o esperarías una diferencia grande entre su radio polar y su radio ecuatorial? Explica por qué.

Respuestas

a) La velocidad de un punto sobre la superficie de Júpiter es tangente al círculo, y es por lo tanto paralela al ecuador (ver Figura 4.2). Llamando r al radio del paralelo de latitud φ , su relación con el radio ecuatorial de Júpiter, R_J , es, $r = R_J \cos \varphi$. Por lo tanto,

$$v = \omega r$$

$$v = \omega R_J \cos \varphi.$$

b) La velocidad angular se calcula a partir de la definición:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{35\,700 \text{ s}}$$

$$\omega = 1.759 \times 10^{-4} \text{ rad/s.}$$

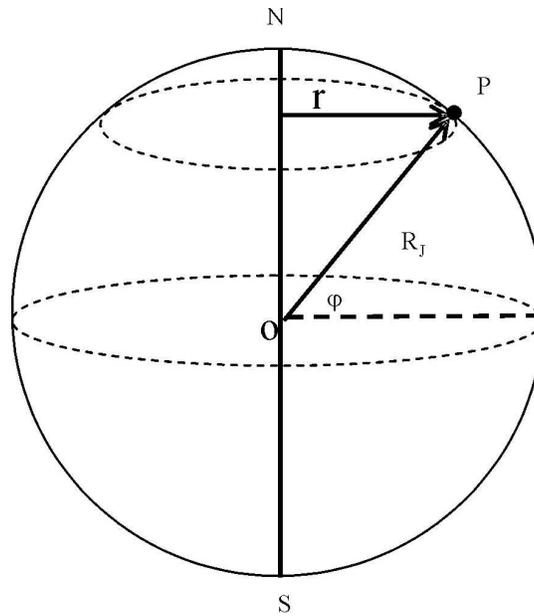


Figura 4.2: Velocidad y aceleración de un punto P sobre la superficie de Júpiter.

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
 v &= \omega R_J \cos \varphi \\
 v &= (1.759 \times 10^{-4} \text{ rad/s})(71492 \times 10^3 \text{ m}) \cos(60^\circ) \\
 v &= 6287.72 \text{ m/s}.
 \end{aligned}$$

La aceleración a_c es centrípeta porque el movimiento es uniforme, su magnitud está dada por,

$$\begin{aligned}
 a_c &= \omega^2 r \\
 a_c &= \omega^2 R_J \cos \varphi \\
 a_c &= (1.759 \times 10^{-4} \text{ rad/s})^2 (71492 \times 10^3 \text{ m}) \cos(60^\circ) \\
 a_c &= 1.106 \text{ m/s}^2.
 \end{aligned}$$

El valor máximo de v ocurre en el ecuador, para el cual $v = 12575.4 \text{ m/s}$.

4.10. Astronauta en la superficie de la Luna

El diámetro de la Luna es un cuarto del de la Tierra y su densidad equivale a dos tercios de la densidad de la Tierra. Supongamos que un astronauta que tiene puesto todo su equipo puede saltar hasta 60 *cm* verticalmente sobre la superficie de la Tierra, donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. ¿A qué altura puede saltar este astronauta en la Luna?

Respuesta

Sobre la superficie de la Tierra la fuerza gravitacional entre la masa de la Tierra M_{\oplus} , y la masa del astronauta m , es

$$mg_{\oplus} = G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2},$$

donde g_{\oplus} denota la gravedad sobre la superficie de la Tierra y R_{\oplus} , la distancia entre centro de masa de la Tierra y el astronauta. Por otra parte, la densidad de la Tierra ρ_{\oplus} , se puede calcular a partir de $\rho_{\oplus} = M_{\oplus}/V$ (considerando que la Tierra es una esfera). Así, la gravedad en la Tierra es

$$\begin{aligned} g_{\oplus} &= G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = \frac{4\pi G R_{\oplus}^3 \rho_{\oplus}}{3R_{\oplus}^2} \\ g_{\oplus} &= \frac{4}{3}\pi \rho_{\oplus} G R_{\oplus}. \end{aligned}$$

Ahora, considerando el mismo caso para el astronauta en la superficie de la Luna, es decir, la fuerza gravitacional entre el astronauta y la Luna es

$$\begin{aligned} mg_L &= G \frac{M_L m}{R_L^2} \\ g_L &= G \frac{M_L}{R_L^2} = \frac{4\pi G R_L^3 \rho_L}{3R_L^2} \\ g_L &= \frac{4}{3}\pi \rho_L G R_L, \end{aligned}$$

donde g_L denota la gravedad sobre la superficie de la Luna; ρ_L , la densidad de la Luna y R_L , la distancia entre centro de masa de la Luna y el astronauta. Para poder conocer la altura a la cual puede saltar el astronauta en la superficie de la Luna, primero es necesario saber cuál es la gravedad en la superficie de la misma.

Considerando que $R_L = R_{\oplus}/4$, $\rho_L = 2\rho_{\oplus}/3$ e igualando ambas expresiones se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{g_{\oplus}}{\rho_{\oplus}R_{\oplus}} &= \frac{g_L}{\rho_L R_L} \\ g_L &= \frac{g_{\oplus}\rho_L R_L}{\rho_{\oplus}R_{\oplus}} \\ g_L &= \frac{g_{\oplus}}{6} = \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{6} \\ g_L &= 1.63 \text{ m/s}^2.\end{aligned}$$

Vamos a analizar el caso sobre la superficie de la Tierra. Cuando el astronauta salta de manera vertical, despega con una velocidad inicial v_0 , esto sucede justamente cuando el astronauta llega a la altura máxima $y = 60 \text{ cm}$; por lo tanto es posible conocer la velocidad inicial, v_0 , con la cual saltó el astronauta a partir de

$$\begin{aligned}v^2 &= v_0^2 - 2g_{\oplus} \cdot y \\ 0 &= v_0^2 - 2g_{\oplus}(0.6 \text{ m}) \\ v_0^2 &= 2g_{\oplus}(0.6 \text{ m}) \\ v_0^2 &= 11.76 \text{ m}^2/\text{s}^2.\end{aligned}$$

Así, cuando el astronauta sobre la Luna, con la misma velocidad inicial v_0 , recorre una distancia vertical y , ocurre que

$$\begin{aligned}v^2 &= v_0^2 - 2g_L \cdot y \\ 0 &= v_0^2 - 2g_L \cdot y \\ y &= \frac{v_0^2}{2g_L} = \frac{(11.76 \text{ m}^2/\text{s}^2)}{2(1.63 \text{ m/s}^2)} \\ y &= 3.6 \text{ m}.\end{aligned}$$

Suponiendo que la superficie de Júpiter es una esfera sólida, ¿puede el astronauta saltar la misma altura en la superficie de Júpiter? ¿Por qué?

4.11. Velocidad de escape para Marte

Una nave espacial desea escapar de la superficie de Marte, los tripulantes saben que la fuerza de atracción ejercida sobre la nave está dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M}{r^2}, \quad (4.24)$$

donde G es la constante de gravitación universal, M , la masa de Marte y r es la distancia al centro de masa del planeta y la nave. Para poder abandonar el planeta, será necesario aplicarle a la nave una velocidad inicial, v_0 , llamada velocidad de escape, suficiente como para lograr salir del planeta. Con base en lo anterior,

- a) Demuestra que la velocidad de escape que necesita la nave para poder abandonar dicha superficie está dada por

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_M}},$$

donde R_M es el radio de Marte.

- b) Suponamos que los tripulantes sólo conocen el valor del radio de Marte ($R_M = 3397 \text{ km}$) y el valor de la aceleración de la gravedad sobre la superficie ($g_M = 3.71 \text{ m/s}^2$). ¿Es posible con esta información conocer el valor de la velocidad de escape?

Respuestas

a) Antes de resolver la ecuación diferencial, es necesario conocer las condiciones iniciales para poder resolver el problema. Cuando $t = 0$, el objeto tendrá una velocidad inicial de lanzamiento v_0 y se encontrará a una distancia $r_0 = R_M$, que será el radio del centro de Marte a la superficie. Por otra parte, es necesario llevar la ecuación (4.24) en términos de v . Entonces debemos considerar que

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr}.$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (4.24), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= -G \frac{M}{r^2} \\ v dv &= -GM \frac{dr}{r^2}. \end{aligned}$$

Integrando de ambo lados,

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v v dv &= -GM \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} \\ \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} &= G \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{GM}{r} - \frac{GM}{R_M} + \frac{v_0^2}{2} \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{GM}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R_M} \right). \end{aligned}$$

De la expresión anterior, la velocidad del cuerpo debe ser enteramente positiva. El término GM/r se hace muy pequeño a medida que el cuerpo se aleja de la superficie de Marte, la única contribución para que la velocidad sea puramente positiva es

$$\begin{aligned}\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R_M} &\geq 0 \\ v_0 &\geq \sqrt{\frac{2GM}{R_M}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad mínima con la cual el objeto puede escapar de la superficie de Marte es

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_M}}.$$

Si la velocidad de lanzamiento es menor que v_0 , la nave regresará a la superficie de Marte y dichos astronautas perderán su oportunidad de abandonar el planeta rojo.

b) En la superficie de Marte, cuando $r_0 = R_M$, la aceleración de la fuerza de gravedad es igual a $g_M = 3.71 \text{ m/s}^2$. De lo anterior, la ecuación que relaciona la fuerza gravitacional entre ambos cuerpos está dada por

$$\begin{aligned}mg_M &= G\frac{Mm}{r^2} \\ g_M &= G\frac{M}{R_M^2} \\ \text{entonces, } M &= \frac{g_MR_M^2}{G}.\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de M en la ecuación de la velocidad de escape v_0 , se tiene que

$$\begin{aligned}v_0 &= \sqrt{2g_MR_M} \\ v_0 &= \sqrt{2(3.71 \text{ m/s}^2)(3397000 \text{ m})} \\ v_0 &= 5020.5 \text{ m/s} = 5 \text{ km/s}.\end{aligned}$$

4.12. Cometa Halley

Edmund Halley (1656-1742) demostró matemáticamente que los cometas giran en órbitas elípticas alrededor del Sol, y que el Sol está en uno de los focos de cada órbita elíptica. Su acertada predicción del regreso de un cometa en 1758, hoy conocido como cometa Halley, reafirmó su teoría de que los cometas son cuerpos celestes que forman parte del Sistema solar.

- a) Demuestra que la ecuación polar de una elipse descrita por los planetas y objetos celestes puede escribirse en la forma

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

donde a es el semieje mayor y ϵ es la excentricidad de la elipse.

- b) Demuestra que la distancia mínima, llamada **perihelio**, está dada por $r_{min} = a(1 - \epsilon)$ y que la distancia máxima, llamada **afelio**, es $r_{max} = a(1 + \epsilon)$.
- c) Si la excentricidad de la órbita del cometa Halley es $\epsilon = 0.967$ y sabiendo que tarda 76 años en dar una vuelta alrededor del Sol, encuentra las distancias máxima y mínima entre el cometa y el Sol.

Respuestas

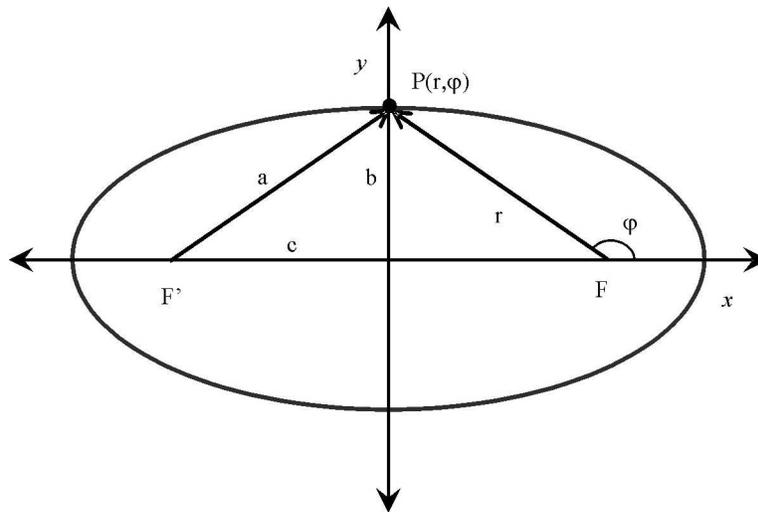


Figura 4.3: Trayectoria elíptica en coordenadas polares.

- a) La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante. A partir de esta propiedad se tiene que

$$PF + PF' = 2a.$$

Primero hallamos la distancia entre los puntos P y F . En coordenadas polares, se tiene la coordenada $F(0, 0)$ y $P(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. A partir de la ecuación de la distancia entre dos puntos, que corresponden al caso más trivial, tenemos que

$$\begin{aligned} d(PF) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} \\ d(PF) &= \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \\ d(PF) &= r. \end{aligned}$$

Ahora obtenemos la distancia entre los puntos P y F' ; dichas coordenadas son $F'(2c \cos \pi, 2c \sin \pi)$ y $P(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. La distancia entre estos dos puntos está dada por

$$\begin{aligned} d(PF') &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(r \cos \varphi - 2c \cos \pi)^2 + (r \sin \varphi - 2c \sin \pi)^2} \\ d(PF') &= \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4cr \{ \cos \varphi \cos \pi + \sin \varphi \sin \pi \}} \\ d(PF') &= \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4cr \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Así, sustituyendo en la condición inicial, se tiene que

$$\begin{aligned} PF + PF' &= 2a \\ r + \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4cr \cos \varphi} &= 2a \\ \left(\sqrt{r^2 + 4c^2 + 4cr \cos \varphi} \right)^2 &= (2a - r)^2 \\ r^2 + 4c^2 + 4cr \cos \varphi &= 4a^2 - 4ar + r^2 \\ c^2 + cr \cos \varphi &= a^2 - ar \\ ar + cr \cos \varphi &= a^2 - c^2 \\ r(a + c \cos \varphi) &= a^2 - c^2. \end{aligned}$$

De la Figura 4.3 se tiene que $a^2 - c^2 = b^2$ y definiendo $\epsilon = c/a$ (excentricidad), se sigue que

$$\begin{aligned} ra \left(1 + \frac{c}{a} \cos \varphi \right) &= b^2 \\ ra(1 + \epsilon \cos \varphi) &= b^2 \\ r(1 + \epsilon \cos \varphi) &= \frac{b^2}{a} = a \left(\frac{a}{a} - \frac{c^2}{a^2} \right) \\ r(1 + \epsilon \cos \varphi) &= a(1 - \epsilon^2) \\ r &= \frac{a(1 - \epsilon^2)}{(1 + \epsilon \cos \varphi)}. \end{aligned}$$

b) Usando la ecuación polar de la elipse y considerando que el objeto celeste se encuentra en el punto en el cual está más cercano al Sol (perihelio), $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - \epsilon^2)}{(1 + \epsilon \cos \varphi)} \\ r &= \frac{a(1 - \epsilon)(1 + \epsilon)}{(1 + \epsilon)} \\ r_{min} &= a(1 - \epsilon). \end{aligned}$$

En su punto más lejano del Sol (afelio), $\varphi = \pi$, el objeto celeste se encuentra a 180° con respecto a la posición más cercana al Sol; de lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - \epsilon^2)}{(1 + \epsilon \cos \varphi)} \\ r &= \frac{a(1 - \epsilon)(1 + \epsilon)}{(1 - \epsilon)} \\ r_{max} &= a(1 + \epsilon). \end{aligned}$$

c) Conociendo el período del cometa Halley, $T = 76$ años, es posible hallar el eje o radio mayor de la elipse, siendo $a = 17.942$ UA. A partir de este hecho, la distancia máxima y mínima al Sol se determina a partir de

$$\begin{array}{lll} r_{max} = a(1 + \epsilon) & y & r_{min} = a(1 - \epsilon) \\ r_{max} = (17.942 \text{ UA})(1 + 0.967) & & r_{min} = (17.942 \text{ UA})(1 - 0.967) \\ r_{max} = 35.29 \text{ UA} & & r_{min} = 0.592 \text{ UA}. \end{array}$$

4.13. Efecto de gravedad en un asteroide

Si estuvieras en un asteroide, ¿sentirías el efecto de gravedad? ¿De qué depende?

Respuesta

En todos los cuerpos, en cualquier concentración de materia, tenemos la presencia de la gravedad. La ley de gravitación universal establece que todos los objetos que tienen masa se atraen mutuamente con una fuerza que es mayor, mientras mayor sea la masa de los objetos y es menor a medida que los objetos se alejan. Esta ley también indica que si una de las dos masas se duplica, la fuerza también se duplica, pero si las masas se separan al doble de la distancia original la fuerza disminuye no a la mitad sino cuatro veces. Por lo tanto, ya sea un objeto de masa muy pequeña

como un meteorito o una galaxia de masa muy grande, en estos existe la fuerza de gravedad siendo ésta dependiente del tamaño de sus masas y de la distancia que los separa. Así, el hecho de que la gravedad sea muy poca en algunos cuerpos y casi imperceptible, no significa que no exista.

4.14. Período de rotación del satélite Io

Debido a que la excentricidad de Io es muy pequeña se considera que describe una órbita circular de radio $R_{Io} = 422 \times 10^3 \text{ km}$ alrededor del planeta Júpiter. Conociendo la masa de Júpiter $M_J = 1.89 \times 10^{27} \text{ kg}$ y la constante $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, determina el período de rotación de Io.

4.15. Distancia del cometa Halley al Sol

El **cometa** Halley fue el primer cuerpo pequeño del sistema solar al que se le determinó su período orbital alrededor del Sol. Este cometa tiene una excentricidad de 0.967 y un semieje mayor de 17.94 *UA*. Empleando los datos anteriores, calcula

- a) La distancia del cometa Halley al Sol en unidades astronómicas en su **perihelio** y en su **afelio**.
- b) Las velocidades lineales en el perihelio y en el afelio.
- c) Las velocidades angulares en el perihelio y en el afelio.

4.16. Caída de objetos a la Tierra y la masa de la Tierra

Según una teoría, el 20 % de la masa del cometa responsable de la extinción de los dinosaurios fue depositada en una capa uniforme sobre la superficie de la Tierra, con una densidad de 0.02 g/cm^2 .

- a) ¿Cuántos objetos como ese tendrían que caer para que la masa de la Tierra aumentara en un 1%?
- b) Si suponemos que la densidad media de la Tierra se mantiene constante, ¿cómo afectaría ese aumento de masa, al peso de cualquier objeto sobre la Tierra?

Capítulo 5

Luminosidad, flujo y magnitud

5.1. Luminosidad de las estrellas

La **Luminosidad** (L) es igual al área superficial de la **estrella** por el flujo de energía que pasa a través de su superficie. Esto es,

$$L = (4\pi R^2)(\sigma T^4),$$

donde R es el radio de la estrella, T , la temperatura en su superficie y σ es la llamada constante de Stefan-Boltzmann.

- a) Vamos a suponer que tres estrellas tienen el mismo diámetro que el Sol y las denotamos por A, B y C en el Cuadro 5.1. Calcula la **luminosidad** de dichas estrellas en función de la luminosidad del Sol, L_{\odot} .

Cuadro 5.1: *Relación entre temperatura y luminosidad de tres estrellas con $R = R_{\odot}$.*

Estrella	Temperatura (K)	Luminosidad (L_{\odot})
Sol	6 000	1
A	12 000	?
B	2 000	?
C	3 6000	?

- b) Algunas estrellas tienen temperaturas de solamente 3 000 K pero son 100 veces más luminosas que el Sol. ¿Cómo explicas esto?

Respuestas

a) La luminosidad del Sol, L_{\odot} , se expresa como

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4, \quad (5.1)$$

donde $T_{\odot} = 6\,000\text{ K}$.

Para la estrella A , tenemos que $T_A = 12\,000\text{ K} = 2T_{\odot}$, así que

$$L_A = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_A^4 = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma (2T_{\odot})^4 = 16(4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4) = 16L_{\odot}.$$

Para la estrella B , tenemos que $T_B = 2\,000\text{ K} = \frac{1}{3}T_{\odot}$, entonces,

$$L_B = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_B^4 = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma \left(\frac{1}{3}T_{\odot}\right)^4 = \frac{1}{81}(4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4) = \frac{1}{81}L_{\odot}$$

Para la estrella C , tenemos que $T_C = 36\,000 = 6T_{\odot}$, y

$$L_C = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_C^4 = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma (6T_{\odot})^4 = 1\,296(4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4) = 1\,296L_{\odot}.$$

b) Ahora veamos el caso de una estrella que tiene temperatura de solamente $3\,000\text{ K}$ pero es 100 veces más luminosa que el Sol. De la ecuación $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ despejamos R :

$$R = \sqrt[2]{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}}. \quad (5.2)$$

Como $L = 100L_{\odot}$ y $T = 3\,000\text{ K} = T_{\odot}/2$ tenemos que

$$\begin{aligned} R &= \sqrt[2]{\frac{100L_{\odot}}{4\pi\sigma(T_{\odot}/2)^4}} \\ &= \sqrt[2]{\frac{100L_{\odot}}{4\pi\sigma T_{\odot}^4/16}} \\ &= \sqrt[2]{\frac{16(100L_{\odot})}{4\pi\sigma T_{\odot}^4}} \\ &= \sqrt[2]{1\,600R_{\odot}^2} \\ &= 40R_{\odot}. \end{aligned}$$

Como vemos en este resultado, la estrella con una temperatura de $3\,000\text{ K}$ es más brillante que el Sol porque su radio es mucho mayor que el radio del Sol.

5.2. Definición de magnitud aparente de Pogson

- a) Demuestra que los **flujos** de dos **estrellas**, cuyas **magnitudes** de acuerdo a la definición de Pogson son m y $m + 1$, están relacionados por

$$F_m = 2.512 \times F_{m+1}. \quad (5.3)$$

- b) Demuestra que la relación entre el flujo de una estrella de magnitud cero (F_o) y una de magnitud m (F_m) es

$$F_o = (2.512)^m F_m. \quad (5.4)$$

- c) Demuestra que la magnitud m se puede expresar como

$$m = -2.5 \log \left(\frac{F_m}{F_o} \right). \quad (5.5)$$

- d) La **magnitud aparente** del Sol es aproximadamente -26 mientras que la de Sirio es aproximadamente -1.5. ¿En qué proporción es mayor el flujo que recibimos del Sol, en relación al que recibimos de Sirio?

Respuestas

a) Para entender la relación entre las diferentes magnitudes veamos la relación que hay entre los flujos correspondientes a ellas. El cociente entre el flujo para una magnitud m y el flujo para $m + 1$ lo vamos a denotar por x .

El flujo correspondiente a magnitudes de 1 a 5 lo expresamos en el Cuadro 5.2 en términos del flujo correspondiente a la magnitud 6.

De acuerdo a la definición de Pogson,

$$F_1 = 100F_6. \quad (5.6)$$

Y tomando la última igualdad del primer renglón del Cuadro 5.2,

$$F_1 = x^5 F_6, \quad (5.7)$$

tenemos que $x^5 = 100 = 10^2$ y, entonces, $x = 10^{2/5}$, de donde resulta que:

$$x = 2.512.$$

Cuadro 5.2: *Relación entre diferentes magnitudes y sus flujos.*

Magnitud (m)	Flujo	Equivalencias
1	F_1	$= xF_2 = x^5F_6$
2	F_2	$= xF_3 = x^4F_6$
3	F_3	$= xF_4 = x^3F_6$
4	F_4	$= xF_5 = x^2F_6$
5	F_5	$= xF_6$
6	F_6	$= F_6$

b) Ahora vamos a usar el flujo correspondiente a magnitud cero, al que denotaremos F_o . Si expresamos F_o en función de F_1 tenemos que $F_o = xF_1$ y entonces,

$$F_o = x(x^5F_6) = x^6F_6. \quad (5.8)$$

A partir de la relación $F_o = xF_1$ también podemos encontrar la relación entre el flujo correspondiente a magnitud cero, F_o , y el flujo correspondiente a cualquier magnitud de las dadas en el cuadro anterior. Así vemos que el flujo para magnitud cero y el flujo para magnitud m , F_m , están relacionados por

$$F_o = x^m F_m. \quad (5.9)$$

c) De la ecuación anterior se sigue que

$$\log\left(\frac{F_o}{F_m}\right) = \log(x^m). \quad (5.10)$$

El segundo miembro de la igualdad se puede escribir como

$$m \log(x) = m \log(10^{2/5}) = \frac{2}{5} m. \quad (5.11)$$

Entonces la ecuación (5.10) se puede escribir:

$$m = \frac{5}{2} \log\left(\frac{F_o}{F_m}\right), \quad (5.12)$$

e intercambiando los miembros del cociente en el argumento del logaritmo resulta que

$$m = -2.5 \log\left(\frac{F_m}{F_o}\right). \quad (5.13)$$

Esta expresión es muy usada en Astronomía y es conveniente tenerla presente para los siguientes problemas.

d) Tenemos que la relación entre magnitud y flujo está dada por

$$m = -2.5 \log \left(\frac{F_m}{F_o} \right), \quad (5.14)$$

así que para el flujo del Sol (F_{\odot}) y el de Sirio (F_S), respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} -26 &= -2.5 \log \left(\frac{F_{\odot}}{F_o} \right) \\ \text{y } -1.5 &= -2.5 \log \left(\frac{F_S}{F_o} \right), \end{aligned}$$

de donde resultan:

$$F_{\odot} = F_o \times 10^{10.4} \quad (5.15)$$

y

$$F_S = F_o \times 10^{0.6}. \quad (5.16)$$

Dividiendo la ecuación (5.15) entre la ecuación (5.16) tenemos que

$$F_{\odot} = F_S \times 10^{-0.6} \times 10^{10.4} = F_S \times 10^{9.8}. \quad (5.17)$$

Sirio es una estrella mucho más brillante que el Sol. Sin embargo, vemos del resultado anterior, que el flujo radiativo (es decir, de luz) que recibimos del Sol es $10^{9.8}$ veces mayor que el que recibimos de Sirio. Esto se debe a que estamos mucho más cerca del Sol que de Sirio.

Nota. Para no confundir los valores 2.512 y 2.5, que aparecen en varias ecuaciones anteriores, vamos a revisar brevemente su origen:

$2.512 = x = 10^{2/5}$, donde x es el cociente entre el flujo para magnitud m y el flujo para magnitud $m + 1$,

$$x = \frac{F_m}{F_{m+1}}.$$

$2.5 = \frac{5}{2}$ es un factor que proviene del exponente ($\frac{2}{5}$) del 10 en la definición de x , el cual se invirtió al despejar m .

5.3. Magnitud aparente de un foco

Supongamos que toda la energía eléctrica recibida por un foco de 100 *watts* (100 *W*) es radiada isotrópicamente como luz en el rango de 400 a 700 *nanómetros*. El **flujo** de Vega, una estrella de **magnitud** cero, es de $3.68 \times 10^{-20} \text{ erg/s cm}^2 \text{ Hz}$ y la **magnitud aparente** de Sirio es de -1.4 .

- Calcula la densidad de flujo (en $\text{erg/s cm}^2 \text{ Hz}$) que se recibe del foco a una distancia de 10 *m*.
- ¿Cuál es la magnitud aparente del foco a esa distancia?
- ¿A qué distancia tendría que estar el foco para que tuviera la misma magnitud aparente que Sirio?

Respuestas

a) En primer lugar, determinamos el flujo del foco. Para ello expresamos la potencia del foco en las unidades usadas en Astronomía (erg/s):

$$L = 100 \text{ W} = 10^2 \text{ J/s} = 10^9 \text{ erg/s}.$$

Ahora, calculamos el intervalo de frecuencias, en Hz , en el que emite luz el foco,

$$\nu [\text{Hz}] = \frac{c [\text{m/s}]}{\lambda [\text{m}]} \quad (5.18)$$

Sustituyendo para $\lambda_1 = 400 \text{ nm} = 4 \times 10^{-7} \text{ m}$ y el valor de la velocidad de la luz, c , obtenemos de la ecuación anterior que

$$\nu_1 = 7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

De igual forma para $\lambda_2 = 700 \text{ nm} = 7 \times 10^{-7} \text{ m}$ obtenemos:

$$\nu_2 = 4.3 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

Así,

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 3.2 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

Con estos valores determinamos el flujo del foco a una distancia $d = 10 \text{ m}$, el cual es

$$\begin{aligned} F_{\text{foco}} &= \frac{L}{\Delta\nu \times 4\pi d^2} \\ &= 2.49 \times 10^{-13} \text{ erg/s cm}^2 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

b) Conociendo el flujo del foco y el flujo de Vega (cuya magnitud es cero) podemos calcular la magnitud aparente del foco a partir de la siguiente expresión:

$$m_{foco} = -2.5 \log \frac{F_{foco}}{F_{Vega}}. \quad (5.19)$$

Sustituyendo los valores tenemos que

$$\begin{aligned} m_{foco} &= -2.5 \log \left(\frac{2.49 \times 10^{-13} \text{ erg/s cm}^2 \text{ Hz}}{3.68 \times 10^{-20} \text{ erg/s cm}^2 \text{ Hz}} \right) \\ &= -17.08. \end{aligned}$$

c) De la ecuación (5.5) se sigue que

$$m_{foco} - m_{Sirio} = -2.5 \log \frac{F_{foco}}{F_{Sirio}}, \quad (5.20)$$

y si $m_{foco} - m_{Sirio} = 0$, entonces $F_{foco} = F_{Sirio}$. Es decir, para que el foco y Sirio tengan la misma magnitud aparente, los flujos que recibimos de ellos deben ser iguales. La relación entre luminosidad y flujo se expresa como

$$F = \frac{L}{\Delta\nu \times 4\pi d^2}. \quad (5.21)$$

Despejamos la distancia (d) del foco a la que recibiríamos el mismo flujo que recibimos de Sirio,

$$d_{foco}^2 = \frac{L}{\Delta\nu \times 4\pi F_{Sirio}},$$

y sustituyendo los valores de L y $\Delta\nu$ encontramos que

$$d_{foco} = 13.6 \text{ km}.$$

Es decir, bajo las suposiciones hechas en el enunciado, resulta que el foco tendría que estar a 13.6 km de distancia para tener la misma magnitud aparente que Sirio.

5.4. Estrellas binarias eclipsantes y su luminosidad

Supongamos que cada una de las componentes de un sistema estelar binario cumple con la relación $L \propto M^4$, donde M es la masa y L , la **luminosidad**. También, que vemos de canto las órbitas que describen las estrellas en su movimiento en torno a un centro de masa común. Y que bajo estas condiciones se observa que la luminosidad total decae en 1 % cuando la componente más brillante pasa frente a la más débil (Figura 5.1a) y en 50 % cuando la más débil pasa frente a la más brillante (Figura 5.1b).

- a) Calcula la relación entre las **temperaturas efectivas** de las estrellas.
- b) Calcula la relación entre las densidades promedio de las estrellas.

Respuestas

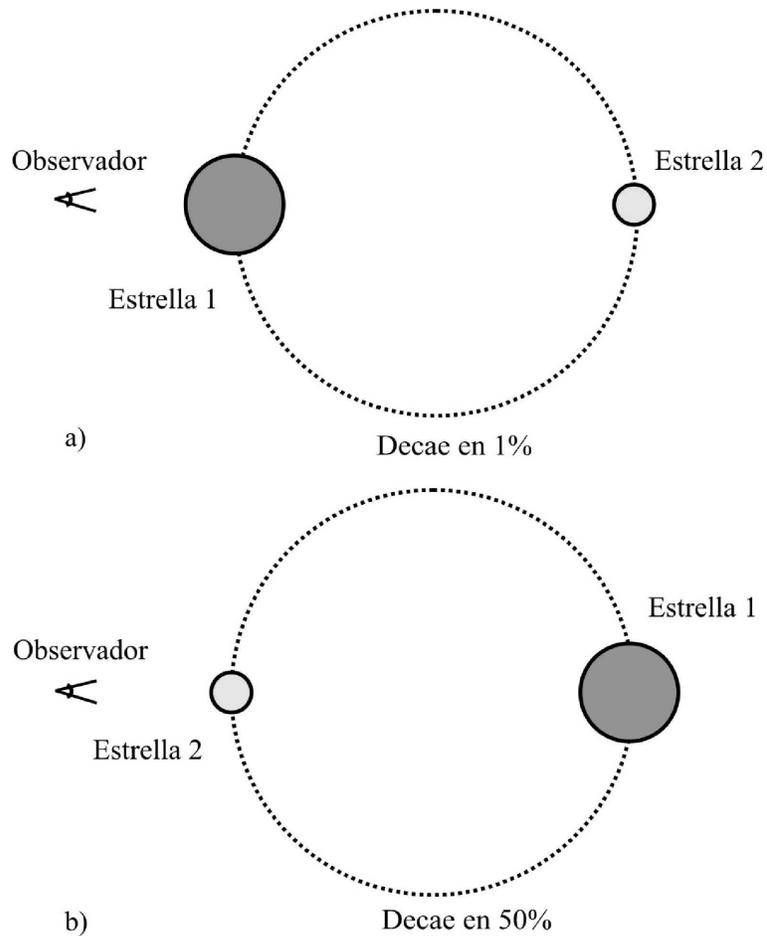


Figura 5.1: Estrellas binarias eclipsantes y su luminosidad.

- a) La luminosidad del sistema cuando las estrellas no se eclipsan es

$$L = L_1 + L_2. \quad (5.22)$$

Del primer eclipse vemos que la primera estrella tiene el 99 % de la luminosidad del sistema, entonces,

$$L_1 = 0.99(L_1 + L_2). \quad (5.23)$$

Simplificando, tenemos que

$$\begin{aligned} L_1 &= 0.99L_1 + 0.99L_2 \\ L_1(1 - 0.99) &= 0.99L_2 \\ 0.01L_1 &= 0.99L_2 \\ \frac{L_1}{L_2} &= 99. \end{aligned} \quad (5.24)$$

En el segundo eclipse, la estrella de menor diámetro cubre un área A_2 de la estrella más grande, cuya área es A_1 . Durante este eclipse la luminosidad del sistema decae en 50 %. Lo anterior lo podemos expresar como

$$\frac{A_2}{A_1}L_1 = (L_1 + L_2)0.5. \quad (5.25)$$

Sustituyendo A_1 y A_2 tenemos que

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 L_1 = (99L_2 + L_2)0.5,$$

y realizando operaciones resulta:

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{R_1^2} &= \frac{100L_2}{R_2^2} \times 0.5 \\ \frac{L_1}{R_1^2} &= 50 \frac{L_2}{R_2^2} \\ \frac{L_1}{4\pi R_1^2} &= 50 \frac{L_2}{4\pi R_2^2}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Entonces,

$$F_1 = 50F_2.$$

Es decir, el flujo superficial de la estrella 1 es 50 veces mayor al flujo superficial de la estrella 2. Como $F = \sigma T^4$, entonces,

$$\frac{\sigma T_1^4}{\sigma T_2^4} = 50.$$

Simplificando, tenemos que

$$\frac{T_1}{T_2} = (50)^{\frac{1}{4}} = 2.7.$$

b) Para calcular la densidad tenemos que calcular primero el radio de cada estrella y su masa, o bien, la relación entre ellas. De la ecuación (5.26) se sigue que

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{1}{50} \frac{L_1}{L_2}.$$

Usando la ecuación (5.24) obtenemos que

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{99}{50}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.4. \quad (5.27)$$

Podemos calcular la masa de $L \propto M^4$. De dicha relación se sigue que

$$M \propto L^{1/4},$$

y entonces,

$$\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1/4} = (99)^{1/4} = 3.2. \quad (5.28)$$

La densidad promedio está dada por

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (5.29)$$

donde ρ es la densidad, M , la masa y V , el volumen. Haciendo el cociente de las densidades tenemos que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_1/V_1}{M_2/V_2} = \frac{M_1 V_2}{M_2 V_1}.$$

Por otro lado, el volumen de un cuerpo esférico lo expresamos como $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Así que la ecuación anterior queda como

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3,$$

y sustituyendo los valores de la ecuación (5.27) y la ecuación (5.28), que habíamos calculado anteriormente, resulta:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 3.2 \times \left(\frac{1}{1.4}\right)^3 = 1.1.$$

De los resultados anteriores, podemos ver que mientras el cociente entre las luminosidades es muy alto (99), el cociente entre las masas (3.2), entre las temperaturas (2.7) y el cociente entre las densidades (1.1), son bajos. Esto se debe a que la luminosidad se expresa como función de R^2 y T^4 (ver definición de Luminosidad, de Flujo y de Temperatura efectiva en el glosario), y para este problema particular la luminosidad también es proporcional a M^4 .

5.5. Magnitud aparente de una estrella

La **magnitud aparente** de una **estrella binaria** es 3.66. La magnitud aparente de una de ellas es 3.7. ¿Cuál es la magnitud aparente de la otra **estrella**?

Respuesta

A partir de la definición de magnitud aparente para una estrella, la magnitud total está dada por

$$m_T = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_T}{F_0} \right).$$

De esta última expresión podemos determinar el valor de la densidad de flujo total:

$$F_T = F_0 10^{-\frac{2}{5}m_T}. \quad (5.30)$$

Por otra parte, si la densidad de flujo de ambas estrellas está dada por $F_1 = F_0 10^{-\frac{2}{5}m_1}$ y $F_2 = F_0 10^{-\frac{2}{5}m_2}$, la densidad de flujo total está dada por

$$F_T = F_1 + F_2 \\ F_T = F_0 10^{-\frac{2}{5}m_1} + F_0 10^{-\frac{2}{5}m_2}. \quad (5.31)$$

Igualando los miembros de las ecuaciones (5.30) y (5.31) tenemos que

$$F_0 10^{-\frac{2}{5}m_T} = F_0 10^{-\frac{2}{5}m_1} + F_0 10^{-\frac{2}{5}m_2}.$$

Eliminando F_0 , sustituyendo $m_T = 3.66$ y $m_1 = 3.7$, determinamos el valor de la magnitud aparente de la segunda estrella m_2 ,

$$10^{-\frac{2}{5}m_2} = (0.03435 - 0.03311) \\ m_2 = -\frac{5}{2} \log(0.00125) \\ m_2 = 7.25.$$

5.6. Magnitud de un grupo de estrellas

Cuando no podemos distinguir las **estrellas** de un grupo estelar y las vemos como si fueran una sola estrella, en realidad medimos la **magnitud** de todo el grupo. En el cielo existe, en la región del Toro, un cúmulo de estrellas llamadas Pléyades. Las estrellas más brillantes de este cúmulo son: Pleione, Atlas, Alcyone,

Maia, Taygeta, Merote y Electra cuyas **magnitudes aparentes** son, respectivamente, 5.09, 3.62, 2.9, 3.87, 4.3, 4.18 y 3.70.

Supongamos que un observador, que está a la misma distancia que nosotros de las Pléyades, no puede distinguir las separadas sino que las ve como una sola, aunque entre ellas no se eclipsen. ¿Qué magnitud aparente registrarían?

Respuesta

La magnitud de una estrella se calcula a partir de la definición de Pogson, sin embargo, no podemos sumar las magnitudes de un cúmulo de estrellas como lo hacemos con la densidad de flujo, ya que las magnitudes son cantidades logarítmicas. Por lo tanto, para hallar la magnitud total, debemos primero resolver en términos de la densidad de flujo. Para esto, primero vamos a hallar la densidad de flujo de cada estrella a partir de la definición:

$$m = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F}{F_0} \right),$$

donde m y F son la magnitud y la densidad de flujo de la estrella observada y F_0 es la densidad de flujo de una estrella de referencia, cuya magnitud aparente es cero. Así, calculando la densidad de flujo para cada estrella tenemos que

$$\begin{aligned} F_* &= F_0 \times 10^{(-\frac{2}{5}m_*)}. \\ F_{Pl} &= F_0 \times 10^{(-2.036)}. \\ F_{At} &= F_0 \times 10^{(-1.448)}. \\ F_{Al} &= F_0 \times 10^{(-1.16)}. \\ F_{Ma} &= F_0 \times 10^{(-1.548)}. \\ F_{Ta} &= F_0 \times 10^{(-1.72)}. \\ F_{Me} &= F_0 \times 10^{(-1.672)}. \\ F_{El} &= F_0 \times 10^{(-1.48)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la densidad de flujo total es

$$F_T = F_{Pl} + F_{At} + F_{Al} + F_{Ma} + F_{Ta} + F_{Me} + F_{El},$$

y la magnitud total:

$$\begin{aligned}
 m_T &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_T}{F_0} \right) \\
 m_T &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_{Pl} + F_{At} + F_{Al} + F_{Ma} + F_{Ta} + F_{Me} + F_{El}}{F_0} \right) \\
 m_T &= -\frac{5}{2} \log \left(0.0092 + 0.0356 + 0.0691 + 0.028 + 0.019 + 0.0212 + 0.033 \right) \\
 m_T &= -\frac{5}{2} \log(0.2157) \\
 m_T &= 1.66.
 \end{aligned}$$

5.7. Distancia a Antares a partir de su magnitud absoluta

Vega es la quinta **estrella** más brillante en el cielo y Antares es la estrella más brillante en la constelación de Escorpión, la **magnitud absoluta** de ésta es -5.46 y su **densidad de flujo** es 0.44. Determina la distancia a la que se encuentra Antares.

Respuesta

Como la densidad de flujo de Antares, denotada por F_a , es 0.44 la de Vega (F_0), tenemos que

$$\begin{aligned}
 F_a &= 0.44F_0 \\
 \frac{F_a}{F_0} &= 0.44.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, calculamos el valor de la magnitud aparente para Antares:

$$m_a = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_a}{F_0} \right), \quad (5.32)$$

Para determinar la distancia r a la cual se encuentra Antares, empleamos la expresión que relaciona la magnitud absoluta y la magnitud aparente,

$$m_a - M_a = 5 \log \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right). \quad (5.33)$$

Sustituyendo m_a , de la ecuación (5.32), en la ecuación (5.33), podemos determinar el valor de r :

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_a}{F_0} \right) - M_a &= 5 \log \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) \\ (0.891 + 5.46) &= 5 \log \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) \\ r &= (10 \text{ pc}) 10^{1.27} \\ r &= 186.32 \text{ pc}. \end{aligned}$$

Así, Antares, la estrella más brillante en la constelación de Escorpión, se encuentra a una distancia de 186.32 pc .

5.8. Distancia a Sirio a partir de su temperatura efectiva

La **magnitud aparente** del Sol es aproximadamente -25.97 y su **temperatura efectiva** es de 5800 K , mientras que la magnitud aparente de Sirio es -1.46, con una temperatura efectiva de 10000 K . Considerando que el diámetro de Sirio es dos veces el diámetro del Sol y que la distancia al Sol es de $4.8611 \times 10^{-6} \text{ pc}$, determina a qué distancia se encuentra Sirio. Recuerda que la **densidad de flujo** se define como $F = \sigma T^4$, llamada ley de Stefan-Boltzmann, donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$, es la constante de Boltzmann.

Respuesta

Vamos a emplear la ecuación que nos relaciona las magnitudes aparentes de ambas estrellas y sus densidades de flujo respectivas:

$$m_s = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F'_s}{F_0} \right) \quad y \quad m_{\odot} = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F'_{\odot}}{F_0} \right),$$

donde m_s , m_{\odot} , F'_s y F'_{\odot} son la magnitud aparente y la densidad de flujo de Sirio y del Sol respectivamente. Sin embargo, la densidad de flujo que nosotros medimos no es F_s ni F_{\odot} sino F'_s y F'_{\odot} , que dependen de la distancia con la que se mide y del radio de dicha estrella, es decir, para Sirio y para el Sol se tiene que

$$F'_s = \frac{R_s^2}{r_s^2} F_s = \frac{4R_{\odot}^2 F_s}{r_s^2} \quad y \quad F'_{\odot} = \frac{R_{\odot}^2}{r_{\odot}^2} F_{\odot},$$

donde R denota el radio de la estrella y r denota la distancia a dicha estrella. Además se debe considerar que Sirio tiene un radio $R_s = 2R_\odot$. Sustituyendo en la expresión que nos relaciona las dos densidades de flujo para cada estrella sabemos que

$$\begin{aligned} m_s - m_\odot &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F'_s}{F'_\odot} \right) \\ m_s - m_\odot &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{4r_\odot^2 F_s}{r_s^2 F_\odot} \right) \\ m_s - m_\odot &= -5 \log \left(\frac{2r_\odot T_s^2}{r_s T_\odot^2} \right). \end{aligned}$$

Despejando el valor de r_s y sustituyendo valores, se llega a:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{2r_\odot T_s^2}{T_\odot^2} 10^{\frac{1}{5}(m_s - m_\odot)} \\ r_s &= \frac{2(4.8611 \times 10^{-6} \text{ pc})(10\,000 \text{ K})^2}{(5\,800 \text{ K})^2} 10^{\frac{1}{5}(-1.46 + 25.97)} \\ r_s &= 2.3 \text{ pc}. \end{aligned}$$

5.9. Magnitud aparente y absoluta de Neptuno

Neptuno es el cuarto planeta en cuanto a tamaño y el octavo en cuanto a distancia al Sol. Los científicos han estimado que dicho planeta tiene una **temperatura efectiva** de 59.3 K . El Sol tiene una **magnitud aparente** de -25.97 (visto desde la Tierra) y una temperatura efectiva de $5\,800 \text{ K}$.

- Calcula la magnitud aparente de Neptuno, visto desde la Tierra.
- El Sol tiene una magnitud aparente de -25.97 , visto desde la Tierra, y una temperatura efectiva de $5\,800 \text{ K}$. El Sol visto desde la superficie de Neptuno **subtiende un ángulo** de $3.09 \times 10^{-4} \text{ radianes}$. Sabiendo que el radio del Sol es de $4.65 \times 10^{-3} \text{ UA}$, calcula la **magnitud absoluta** de Neptuno.

Respuestas

a) Partimos de la ley de Stefan-Boltzmann: la densidad de flujo para el Sol y para Neptuno serán, respectivamente, F_\odot y F_N , dadas por

$$F_\odot = \sigma T_\odot^4 \quad y \quad F_N = \sigma T_N^4.$$

Ahora, calculando la magnitud aparente para el Sol y para Neptuno, tenemos que

$$m_{\odot} = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_{\odot}}{F_0} \right) \quad y \quad m_N = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_N}{F_0} \right).$$

Necesitamos relacionar la magnitud aparente del Sol, m_{\odot} , la magnitud aparente de Neptuno, m_N , y las temperaturas efectivas eliminando F_0 , por lo tanto,

$$\begin{aligned} m_N - m_{\odot} &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_N}{F_0} \right) + \frac{5}{2} \log \left(\frac{F_{\odot}}{F_0} \right) \\ m_N - m_{\odot} &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_N}{F_{\odot}} \right) \\ m_N - m_{\odot} &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{\sigma T_N^4}{\sigma T_{\odot}^4} \right) \\ m_N &= -10 \log \left(\frac{T_N}{T_{\odot}} \right) + m_{\odot}. \end{aligned}$$

Sustituyendo valores tenemos que

$$\begin{aligned} m_N &= -10 \log \left(\frac{59.3 \text{ K}}{5800 \text{ K}} \right) + (-25.97) \\ m_N &= -6. \end{aligned}$$

b) El ángulo que subtiende el Sol visto desde Neptuno es $\alpha = 3.09 \times 10^{-4}$ *radianes*, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} &= \frac{R_{\odot}}{r_{\odot}} \\ r_{\odot} &= \frac{2R_{\odot}}{\alpha}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde R_{\odot} es el radio del Sol y r_{\odot} es la distancia de Neptuno al Sol. Así, utilizando la definición de magnitud absoluta y sustituyendo r_{\odot} , de la ecuación (5.34), la magnitud absoluta de Neptuno será

$$\begin{aligned} m_N - M_N &= 5 \log \left(\frac{r_{\odot}}{10 \text{ pc}} \right) \\ M_N &= m_{\odot} - 5 \log \left(\frac{2R_{\odot}}{\alpha \cdot 10 \text{ pc}} \right) \\ M_N &= 18.18. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para Neptuno se tiene una magnitud aparente de -6 y una magnitud absoluta de 18.18.

5.10. Radiación térmica de los planetas

El término albedo, denotado por A , define la capacidad de un cuerpo para reflejar la luz. Los planetas de nuestro Sistema solar no tienen luz propia, pero la reflejan y absorben. El brillo de un planeta depende de su distancia al Sol y del albedo de su superficie visible. Si el albedo de un cuerpo es A , la fracción de radiación absorbida por el cuerpo es $(1 - A)$. Si el cuerpo está a una distancia r del Sol, el flujo de energía o **luminosidad** absorbida es

$$L_{abs} = \frac{R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \pi R^2}{r^2} (1 - A),$$

donde R es el radio del planeta, $R_{\odot} = 6.96 \times 10^5 \text{ km}$ y $T_{\odot} = 5800 \text{ K}$ son el radio y la **temperatura efectiva** del Sol, respectivamente, y σ es la constante de Stefan-Boltzmann. Suponiendo que el cuerpo rota lentamente, la radiación térmica es emitida principalmente por uno de los hemisferios del cuerpo. Así, la luminosidad emitida es

$$L_{em} = 2\pi R^2 \sigma T^4,$$

donde T es la temperatura del cuerpo y $2\pi R^2$ es el área de un hemisferio. Si el cuerpo rota rápidamente emitiendo aproximadamente el mismo flujo en todas partes de su superficie, la luminosidad emitida es, entonces,

$$L_{em} = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

- a) Demuestra que cuando el cuerpo celeste rota lentamente su temperatura está dada por

$$T = T_{\odot} \left(\frac{1 - A}{2} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2},$$

y para el caso en que rota rápidamente su temperatura está dada por

$$T = T_{\odot} \left(\frac{1 - A}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2},$$

- b) Júpiter tiene un albedo esférico de 0.73 y se encuentra a 5.2 UA del Sol. Determina cuál es la temperatura del planeta.

Respuestas

- a) Partimos de la suposición de que el sistema debe estar en equilibrio térmico debido a que emite y absorbe de manera tal que el sistema tiene una temperatura

promedio; de lo contrario, si un sistema es muy caliente y el otro muy frío, la interacción de ambos tenderá a encontrar el equilibrio térmico en el cual ambos sistemas tengan la misma temperatura. Como hemos mencionado, para que dos sistemas se encuentren en equilibrio térmico, ambos sistemas deben estar a la misma temperatura, es decir, $L_{abs} = L_{em}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 L_{abs} &= L_{em} \\
 \frac{R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \pi R^2}{r^2} (1 - A) &= 2\pi R^2 \sigma T^4 \\
 \frac{R_{\odot}^2 T_{\odot}^4}{r^2} (1 - A) &= 2T^4 \\
 T^4 &= T_{\odot}^4 \left(\frac{1 - A}{2} \right) \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right) \\
 T &= T_{\odot} \left(\frac{1 - A}{2} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Un cuerpo rotando rápidamente emite una densidad de flujo en todas direcciones. Aplicando la condición de equilibrio térmico tenemos:

$$\begin{aligned}
 L_{abs} &= L_{em} \\
 \frac{R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \pi R^2}{r^2} (1 - A) &= 4\pi R^2 \sigma T^4 \\
 \frac{R_{\odot}^2 T_{\odot}^4}{r^2} (1 - A) &= 4T^4 \\
 T^4 &= T_{\odot}^4 \left(\frac{1 - A}{4} \right) \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right) \\
 T &= T_{\odot} \left(\frac{1 - A}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

b) Tomando el resultado del inciso a), tenemos que el radio del Sol es $R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, cuya temperatura efectiva es $T_{\odot} = 5800 \text{ K}$. Júpiter se encuentra a $r = 5.2 \text{ UA}$ del Sol con un albedo $A = 0.73$. Considerando que el cuerpo rota de manera lenta, se sustituye directamente:

$$\begin{aligned}
 T &= T_{\odot} \left(\frac{1 - A}{2} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2} \\
 T &= (5800 \text{ K}) \left(\frac{1 - 0.73}{2} \right)^{1/4} \left(\frac{6.96 \times 10^8 \text{ m}}{7.8 \times 10^{11} \text{ m}} \right)^{1/2} \\
 T &= 105 \text{ K}.
 \end{aligned}$$

Si ahora consideramos los mismos parámetros y suponemos que Júpiter rota muy rápido, su temperatura será

$$T = T_{\odot} \left(\frac{1-A}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^{1/2}$$

$$T = (5800 \text{ K}) \left(\frac{1-0.73}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{6.96 \times 10^8 \text{ m}}{7.8 \times 10^{11} \text{ m}} \right)^{1/2}$$

$$T = 88.31 \text{ K}.$$

Las temperaturas teóricas obtenidas anteriormente no son válidas para la mayoría de los planetas. Los principales responsables aquí son la atmósfera y el calor interno. La razón es el efecto invernadero que permite que la radiación llegue, pero no salga de la atmósfera de los planetas.

5.11. Magnitud de una estrella dividida en dos partes

Hipotéticamente, en el transcurso de una guerra interestelar, una loca civilización partió una **estrella** en dos partes iguales. No cambió la densidad ni la temperatura de las dos mitades esféricas que quedaron.

- a) ¿Cómo quedó después de este suceso la **magnitud** del objeto?
- b) ¿Cuál es la magnitud de la estrella doble resultante comparada con la de la estrella original?

Capítulo 6

Física estelar

6.1. Parámetros físicos de una estrella

En una **estrella**, la variación de su densidad con la distancia a su centro es aproximadamente una ley de potencias, $\rho(r) = 1.41 \times 10^{16} r^{-1.5} \text{ kg/m}^3$. Si una estrella tiene un radio de 10^9 m y una **luminosidad** de $2 \times 10^{25} \text{ W}$ (donde la W denota *watts*, $1 \text{ W} = \text{J/s}$), calcula:

- La masa de la estrella.
- Su energía potencial.
- La energía térmica.
- El tiempo que le tomaría a la estrella colapsarse a un punto debido a su gravedad.

Respuestas

a) Para el cálculo de la masa de la estrella partimos de la expresión de la diferencial de masa como función de la densidad:

$$dM = \rho dV. \tag{6.1}$$

Integrando sobre el volumen tenemos que la masa es

$$\begin{aligned}
 M &= \int 1.41 \times 10^{16} r^{-1.5} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi & (6.2) \\
 M &= 1.41 \times 10^{16} \int_0^R r^{0.5} dr \int_{\Omega} \sin \theta dr d\theta d\phi \\
 M &= 1.41 \times 10^{16} \frac{R^{1.5}}{1.5} 4\pi \\
 M &= 3.76 \times 10^{16} \pi R^{1.5} [kg].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la masa de la estrella es

$$M = 3.73 \times 10^{30} \text{ kg} = 1.88 M_{\odot}.$$

b) Para calcular la energía potencial de la estrella, recordemos que la energía potencial de un cuerpo esféricamente simétrico y sólido es

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (6.3)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, resulta que la energía potencial de la estrella es

$$U = -\frac{3}{5} \frac{(6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2) \times (3.73 \times 10^{33} \text{ g})^2}{10^{11} \text{ cm}} = -5.56 \times 10^{48} \text{ erg}.$$

c) Para calcular la energía térmica recordemos que, a partir del Teorema del Virial, la energía cinética, K , es igual a un medio de la energía potencial, U ,

$$K = -\frac{1}{2} U. \quad (6.4)$$

Trivialmente se tiene que la energía cinética, en este caso energía térmica, es

$$K = \frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (6.5)$$

y entonces,

$$K = 2.78 \times 10^{48} \text{ erg}.$$

d) El tiempo de caída libre lo calculamos usando la expresión de la distancia recorrida por un cuerpo en un movimiento rectilíneo con aceleración constante:

$$d = vt + \frac{1}{2} at^2, \quad (6.6)$$

donde, d es la distancia, v es la velocidad, a es la aceleración y t es el tiempo. Para calcular el tiempo, t , de caída libre de un cuerpo que inicialmente está en reposo ($v = 0$) y cae con aceleración constante, a , se concluye que el tiempo de caída, hasta recorrer una distancia, d , es

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}},$$

donde $d = R$ y $a = \frac{GM}{R^2}$. La relación anterior la podemos escribir como

$$t = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}}.$$

Por lo tanto, el tiempo de caída libre, t , es

$$t = \sqrt{\frac{2 \times (10^{11} \text{ cm})^3}{(6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2) \times (3.73 \times 10^{33} \text{ g})}} = 2835.29 \text{ s} = 47.25 \text{ min.}$$

6.2. Colapso a estrella de neutrones

Si una **estrella de neutrones** está en un sistema binario, le arrancará material a su **estrella** compañera. Precisamente este material, que cae sobre la estrella de neutrones, produce fenómenos que permiten detectar el sistema y deducir que contiene una de ellas.

- a) Considerando, solamente el efecto gravitacional, muestra que cuando una masa pequeña m cae, desde una gran distancia, sobre la superficie de una estrella de masa M y radio R , la energía potencial liberada está dada por

$$U = -\frac{GMm}{R}. \quad (6.7)$$

- b) Una masa de $10^{-7}M_{\odot}$ por año cae sobre la superficie de una estrella de neutrones cuya masa es $M = 1M_{\odot}$ y radio $R = 10 \text{ km}$. Si toda la energía potencial liberada es radiada, muestra que la **luminosidad** observada es de $2.17 \times 10^5 L_{\odot}$.
- c) Si consideráramos que la energía radiada por una estrella de neutrones es la de un cuerpo negro, ¿cuál debería ser su **temperatura efectiva**? ¿En qué parte del espectro electromagnético podríamos ver la radiación emitida por la estrella de neutrones?

Respuestas

a) Partimos de la definición de energía potencial, U :

$$\int_0^U dU = - \int_{\infty}^R F \bullet dl, \quad (6.8)$$

donde F es la fuerza de atracción gravitacional, también expresada por

$$F = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (6.9)$$

Sustituyendo la ecuación (6.9) en la ecuación (6.8) e integrando ésta última tenemos que

$$\begin{aligned} U &= - \int_{\infty}^R G \frac{Mm}{r^2} dr \\ U &= -GMm \left(\frac{1}{r} \right)_{\infty}^R. \end{aligned}$$

Entonces, la energía potencial liberada es

$$U = - \frac{GMm}{R}.$$

b) Como en este caso se considera que toda la energía potencial es radiada, la luminosidad es igual a la variación (que en este caso corresponde a una disminución) de la energía potencial, es decir,

$$L = - \frac{dU}{dt}. \quad (6.10)$$

Derivando la ecuación (6.7) con respecto del tiempo tenemos que

$$L = G \frac{M}{R} \frac{dm}{dt},$$

donde, la tasa de acreción es $\frac{dm}{dt} = 10^{-7} M_{\odot} \text{ años}^{-1} = 6.29 \times 10^{18} \text{ g/s}$, $M = 1M_{\odot}$ y $R = 10 \text{ km}$. Sustituyendo los valores tenemos que

$$L = (6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2) \frac{(1.98 \times 10^{33} \text{ g})}{10^6 \text{ cm}} (6.29 \times 10^{18} \text{ g/s}) = 8.29 \times 10^{38} \text{ erg/s}.$$

Como la luminosidad del Sol es $L_{\odot} = 3.82 \times 10^{33} \text{ erg/s}$, entonces,

$$L = 2.17 \times 10^5 L_{\odot}.$$

c) Si se pensara que la estrella de neutrones emite como un cuerpo negro entonces, de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann, la potencia total emitida sería

$$L = \sigma AT^4, \quad (6.11)$$

donde σ es la constante de Stefan ($5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$), A es el área de la superficie ($4\pi R^2$) que emite la radiación y T es la temperatura efectiva del cuerpo negro. Por lo tanto, la temperatura efectiva es

$$T = \left(\frac{2.17 \times 10^5 L_{\odot}}{\sigma 4\pi R^2} \right)^{1/4}.$$

Sustituyendo valores tenemos que

$$T = 32.84 \times 10^6 \text{ K}.$$

De acuerdo con la ley de Wien, para calcular la longitud de onda del máximo en la emisión de cuerpo negro:

$$\lambda_{max} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m K}. \quad (6.12)$$

Por lo tanto,

$$\lambda_{max} = 0.88 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

La radiación “cae” en la región de rayos X del espectro electromagnético.

6.3. Velocidad de giro de un pulsar

El **pulsar** PSR B1913+16, que da una vuelta cada 59 *milisegundos* y tiene una masa de 1.4 veces la masa del Sol, tiene un radio de sólo 10 *km*. Demuestra que PSR B1913+16 no se romperá en pedazos a pesar de girar tan rápido.

Respuesta

Para que el pulsar no se rompa, a pesar de que gira rápidamente sobre su propio eje, debe cumplir con la condición de que la fuerza centrífuga (F_c) sea menor o igual a la fuerza de gravedad (F_g):

$$F_c \leq F_g. \quad (6.13)$$

La igualdad en la ecuación (6.13) corresponde al caso en el que se llega a la fuerza centrífuga máxima que podría soportar el pulsar sin romperse (para fuerzas centrífugas mayores el pulsar se rompería). Sustituyendo las expresiones para estas

fuerzas y simplificando tenemos que

$$v = \left(\frac{GM}{R} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.14)$$

donde v es la velocidad tangencial en la superficie del pulsar, R su radio, M su masa y G la constante gravitacional. Sustituyendo los valores en la ecuación anterior encontramos que

$$v = 1.33 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Por otro lado, a partir del período del pulsar, T , se puede encontrar su velocidad tangencial:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 4 \times 10^7 \text{ m/s.} \quad (6.15)$$

Como esta velocidad no excede el máximo calculado anteriormente, el pulsar no se rompe.

6.4. Energía emitida por el Sol

La energía que captamos del Sol nos llega principalmente en forma de luz, y su origen está en la transformación de la materia en energía por las reacciones nucleares que ocurren en su interior. De acuerdo con las teorías actuales, se cree que el Sol vivirá, tal y como es ahora, 10 000 millones de *años*.

Otra forma en la que se cree que se puede producir luz a partir de la materia es por la caída de un objeto a un hoyo negro. Se estima que aproximadamente el 30 % de la masa de un objeto se convertiría en luz al ir cayendo en un hoyo negro.

- a) ¿Cuánta energía emitirá el Sol a lo largo de 10^{10} *años* si durante ese tiempo se emitiera la misma cantidad de luz que en la actualidad? El valor de la **luminosidad** del Sol es $L_{\odot} = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$.
- b) ¿Cuánta energía emitiría el Sol si cayera a un hoyo negro?

Respuestas

a) La luminosidad del Sol es $L_{\odot} = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$; la energía emitida en $t = 10^{10}$ *años* con una luminosidad constante de L_{\odot} será

$$\begin{aligned} E &= tL_{\odot} \\ E &= (3.15 \times 10^{17} \text{ s})(3.9 \times 10^{26} \text{ W}) \\ E &= 1.22 \times 10^{44} \text{ J.} \end{aligned}$$

b) Si la masa del Sol es $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$, la cual se reduce en un 30% al caer en un hoyo negro, y la velocidad de la luz es $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, la cantidad de energía total emitida será

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \\ E &= 0.3M_{\odot}c^2 \\ E &= (0.3)(1.989 \times 10^{30} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \\ E &= 5.37 \times 10^{46} \text{ J.} \end{aligned}$$

6.5. Constante solar

Suponiendo que el Sol radia isotrópicamente con una **temperatura efectiva** de $T_e = 5800 \text{ K}$ y considerando que el **ángulo subtendido** por el Sol, visto desde la Tierra, es de $32'$ (*minutos*):

- Demuestra que la **densidad de flujo** del Sol recibida en la Tierra, llamada constante solar, es $S_{\odot} \approx 1370 \text{ W/m}^2$.
- ¿Cuántos metros cuadrados de superficie solar se necesitan para producir 10^9 W ?

Respuestas

a) Primero determinamos el valor de la densidad de flujo en la superficie del Sol a partir de la ley de Stefan-Boltzmann:

$$F_{\odot} = \sigma T_e^4,$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$), y $T_e = 5785 \text{ K}$ es la temperatura efectiva. Sustituyendo valores se tiene que la densidad de flujo sobre la superficie del Sol es $F_{\odot} = 6.35 \times 10^7 \text{ W/m}^2$.

Puesto que la luminosidad es constante, a partir de la definición se tiene que

$$\begin{aligned} L &= 4\pi R_{\odot}^2 F_{\odot} = 4\pi r^2 F \\ F &= F_{\odot} \frac{R_{\odot}^2}{r^2}, \end{aligned}$$

donde R_{\odot} es el radio del Sol el cual tiene una densidad de flujo F_{\odot} y r es el radio el cual tiene una densidad de flujo F . Si el diámetro angular del Sol es $\alpha = 32'$,

$$\begin{aligned}\frac{R_{\odot}}{r} &= \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{32}{60} \right) \left(\frac{\pi}{180^{\circ}} \right) = 4.65 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ \left(\frac{R_{\odot}}{r} \right)^2 &= 2.16 \times 10^{-5} \text{ rad}^2.\end{aligned}$$

La densidad de flujo, F , que se tiene en la Tierra es, por lo tanto,

$$\begin{aligned}F &= F_{\odot} \frac{R_{\odot}^2}{r^2} \\ F &= \left(6.35 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \right) \left(2.16 \times 10^{-5} \text{ rad}^2 \right) \\ F &= 1371.6 \text{ W/m}^2 \approx 1370 \text{ W/m}^2.\end{aligned}$$

Entonces, la densidad de flujo a una distancia r , que es la distancia entre el Sol y la Tierra, es $F = 1371.6 \text{ W/m}^2$, que es el valor aproximado de la constante solar S_{\odot} .

b) Requerimos determinar cuál es el área, A , necesaria para tener una luminosidad de 10^9 W , es decir $L = 1 \times 10^9 \text{ W}$, en función de la densidad de flujo de la superficie del Sol F_{\odot} . Partiendo de la definición de luminosidad, despejamos el área superficial del Sol ($A = 4\pi R_{\odot}^2$) y sustituimos valores:

$$\begin{aligned}L &= 4\pi R_{\odot}^2 F_{\odot} \\ A &= \frac{L}{F_{\odot}} = \frac{1 \times 10^9 \text{ W}}{6.35 \times 10^7 \text{ W/m}^2} \\ A &= 15.74 \text{ m}^2.\end{aligned}$$

Es decir, el área necesaria para tener una luminosidad de 10^9 W es 15.74 m^2 .

6.6. Explosión de una estrella

Una **estrella** explota como una **supernova**, la cual tiene una **magnitud absoluta** de -16.5. Si, antes de la explosión, la estrella tenía una magnitud absoluta de 6, determina en cuánto aumentó su **densidad de flujo**, en relación a la que tenía antes de la explosión.

Respuesta

Antes de la explosión, la magnitud aparente, m_1 , para la estrella está dada por

$$m_1 = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_1}{F_0} \right),$$

donde F_1 es la densidad de flujo de la estrella y F_0 es la densidad de flujo de referencia. Por otra parte, la magnitud aparente en función del radio, r , y la magnitud absoluta, M_1 , está dada por:

$$m_1 = 5 \log \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) + M_1.$$

De las dos expresiones anteriores, podemos igualar m_1 de tal manera que

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_1}{F_0} \right) &= 5 \log \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) + M_1 \\ M_1 &= -\frac{5}{2} \log(F_1) + \frac{5}{2} \log(F_0) - 5 \log \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Después de la explosión de la estrella, ésta se convierte en supernova, su densidad de flujo aumenta N veces la densidad de flujo inicial, es decir,

$$F_T = N F_1.$$

Así, la magnitud aparente de la supernova será

$$\begin{aligned} m_T &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_T}{F_0} \right) \\ m_T &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{N F_1}{F_0} \right). \end{aligned}$$

Por otra parte, la magnitud aparente en función del radio, r , y la magnitud absoluta, M_T , para la supernova está dada por

$$m_T = 5 \log \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) + M_T.$$

De estas dos expresiones podemos igualar m_T de tal manera que

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2} \log \left(\frac{N F_1}{F_0} \right) &= 5 \log \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) + M_T \\ M_T + \frac{5}{2} \log(N) &= -\frac{5}{2} \log(F_1) + \frac{5}{2} \log(F_0) - 5 \log \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

El problema que enfrentamos es que no conocemos F_0 ni la distancia r a la que se encuentra dicha estrella; por lo tanto, necesitamos eliminar estos términos y hallar el valor de N , que será el número de veces que ha aumentado la densidad de flujo inicial. En la ecuación (6.17), observamos que los tres términos del lado derecho son iguales a la ecuación (6.16); si reducimos,

$$\begin{aligned} M_T + \frac{5}{2} \log(N) &= M_1 \\ N &= 10^{\frac{2}{5}(M_1 - M_T)}. \end{aligned}$$

Y sustituyendo $M_1 = 6$ y $M_T = -16.5$, tenemos que

$$\begin{aligned} N &= 10^{\frac{2}{5}(M_1 - M_T)} \\ N &= 10^9. \end{aligned}$$

Así, la densidad de flujo total debida a la explosión es $F_T = 10^9 F_1$, es decir, un billón de veces la densidad de flujo inicial.

6.7. Luminosidad de una estrella

Con base en observaciones hechas con un telescopio, se puede identificar el color de la superficie de una **estrella**, el cual nos dice la temperatura de la superficie. También se puede estimar la distancia a la estrella y podemos estimar su brillo aparente (**densidad de flujo** en W/m^2). Una combinación de la distancia y el brillo aparente nos dice cual es la potencia emitida por la superficie de la estrella en forma de luz (**luminosidad**, L). Por facilidad, todos los valores de L deben ser expresados en términos de la luminosidad solar, L_\odot .

- a) Demuestra que la luminosidad, en función del radio y la temperatura de las estrellas, puede relacionarse mediante la ecuación:

$$\log\left(\frac{R}{R_\odot}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) - 2 \log\left(\frac{T}{T_\odot}\right).$$

- b) La temperatura de una gigante roja es 2500 K y su radio es 100 veces el radio solar. Si la **temperatura efectiva** del Sol es 5800 K y su luminosidad es $L_\odot = 3.9 \times 10^{26}\text{ W}$, determina la luminosidad de la estrella.
- c) Si la luminosidad, en el rango visible, de una estrella que se encuentra a una distancia de 10 parsecs es $L_v = 3.45 \times 10^{27}\text{ W}$, compara la luminosidad de la estrella con la de una lámpara de 100 W que radia 5% de su energía en el rango visible. ¿A qué distancia tendría que estar dicha lámpara para que tuviera el mismo brillo que la estrella?

Respuestas

a) Partimos de la ecuación que relaciona la magnitud aparente de dos estrellas, en este caso, un estrella arbitraria y el Sol, la cual esta dada por

$$m - m_{\odot} = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F}{F_{\odot}} \right). \quad (6.18)$$

Por otra parte, la densidad de flujo para cada estrella, en función de la luminosidad y del radio, está dada por

$$F = \frac{L}{4\pi R^2} \quad y \quad F = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2}.$$

Así, sustituyendo F y F_{\odot} en la ecuación (6.18), tenemos que

$$\begin{aligned} m - m_{\odot} &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F}{F_{\odot}} \right) = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L4\pi R_{\odot}^2}{L_{\odot}4\pi R^2} \right) \\ -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F}{F_{\odot}} \right) &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) - 5 \log \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right) \\ -10 \log \left(\frac{T}{T_{\odot}} \right) &= -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) - 5 \log \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right) \\ \log \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) - 2 \log \left(\frac{T}{T_{\odot}} \right). \end{aligned}$$

Tomando la ecuación anterior, despejamos el valor de L , sustituyendo valores y considerando que la temperatura efectiva del Sol es 5800 K y $L_{\odot} = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) &= 4 \log \left(\frac{T}{T_{\odot}} \right) + 2 \log \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right) \\ \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) &= 4 \log \left(\frac{2500 \text{ K}}{5800 \text{ K}} \right) + 2 \log \left(\frac{100R_{\odot}}{R_{\odot}} \right) \\ L &= (3.9 \times 10^{26} \text{ W}) 10^{2.5380} \\ L &= 1.34 \times 10^{29} \text{ W}. \end{aligned}$$

b) Si la lámpara radia sólo el 5% en el rango visible, entonces la luminosidad de ésta será $L_{lam} = 5 \text{ W}$ y puesto que la luminosidad de la estrella en el rango visible es $L_v = 3.45 \times 10^{27} \text{ W}$, el cociente será

$$\begin{aligned} \frac{L_v}{L_{lam}} &= \frac{3.45 \times 10^{27} \text{ W}}{5 \text{ W}} \\ L_v &= 6.9 \times 10^{26} L_{lam}. \end{aligned}$$

Es decir, la luminosidad de la estrella es 6.9×10^{26} veces la luminosidad de la lámpara.

c) La densidad de flujo que nos llega de la estrella a una distancia de 10 *pc* es

$$\begin{aligned} F'_v &= \frac{L_v}{4\pi r^2} \\ F'_v &= \frac{3.45 \times 10^{27} W}{4\pi(3.08567 \times 10^{17} m)^2} \\ F'_v &= 2.88 \times 10^{-9} W/m^2. \end{aligned}$$

Puesto que la densidad de flujo de la lámpara debe ser igual a la que nos llega de la estrella a una distancia de 10 *pc*, $F_{lam} = F'_v$, entonces, la distancia a la cual debe colocarse la lámpara, de manera que su densidad de flujo sea igual a la estrella, es

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{L_{lam}}{4\pi F'_v} \\ r^2 &= \frac{(5 W)}{4\pi(2.88 \times 10^{-9} W/m^2)} \\ r &= 11746.94 m = 11.74 km. \end{aligned}$$

Es decir, la lámpara tendría que estar a 11.74 *km* de distancia para tener la misma densidad de flujo que la estrella.

6.8. Transferencia radiativa

Una persona en la Tierra observa a simple vista hacia el centro del disco solar que la **intensidad** en la fotosfera es $I_\nu(0)$. Como la corona solar es un gas que está entre la fotosfera y nosotros, el análisis de esta situación lo podemos hacer con base en la ecuación de **transporte radiativo**. Si a simple vista la corona tiene una profundidad óptica $\tau_\nu \ll 1$ y la función fuente S_ν se considera constante, calcula la **intensidad** $I_\nu(\tau_\nu)$ que ve dicho observador.

Respuesta

Primero integramos $I_\nu(\tau_\nu)$ a través de la profundidad óptica considerando que S_ν es constante.

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu-t)} S_\nu(t) dt \\ I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu-t)} dt. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable $u = -(\tau_\nu - t)$, tenemos que $du = dt$; entonces,

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu \int e^u du \\ I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu e^{-(\tau_\nu-t)} \Big|_0^{\tau_\nu} \\ I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu \left[e^{-(\tau_\nu-\tau_\nu)} - e^{-(\tau_\nu-0)} \right] \\ I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu \left[1 - e^{-\tau_\nu} \right]. \end{aligned}$$

En un día normal la profundidad óptica $\tau_\nu \approx 0$, es decir, $\tau_\nu \ll 1$, de ahí que

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &\approx I_\nu(0)e^{-0} + S_\nu \left[1 - e^{-0} \right] \\ I_\nu(\tau_\nu) &\approx I_\nu(0)e^{-0} + S_\nu \left[1 - 1 \right] \\ I_\nu(\tau_\nu) &\approx I_\nu(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la intensidad que ve el observador en un día normal es la intensidad de la fotosfera.

6.9. Estrella de neutrones

Supongamos que tenemos un pulsar, en el cual cada pulso corresponde a una rotación, entonces el período de rotación lo podemos estimar midiendo el tiempo entre dos pulsaciones.

Un púlsar tiene actualmente una frecuencia de rotación de 30 veces por segundo, pero su período fue creciendo a razón de 1×10^{-5} *segundos* por año desde hace 938 *años*. Supón que no hay pérdidas de masa y que la distribución es homogénea.

- ¿Cuál era su velocidad angular hace 938 *años*?
- Si el radio actual de la estrella es de 16 *km*, ¿cuál era su radio hace 938 *años*?
- Ahora supón que tienes el caso en el que la aceleración es constante, ¿cuándo crees tú que dejara de girar el púlsar?

Respuesta

a) Una revolución completa equivale a un desplazamiento de $\Delta\theta = 2\pi$ *radianes*, si conocemos el período de rotación del pulsar, su velocidad angular es

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{T} = \frac{2\pi}{0.033 \text{ s}} = 190.39 \text{ rad/s}.$$

Por otra parte, para el pulsar descrito anteriormente la razón de cambio por *año* es

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= 10^{-5} \text{ s/año} \\ T_i &= T_f - (10^{-5} \text{ s/año}) \cdot t \\ T_i &= 2.39 \times 10^{-2} \text{ s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} = 262.3 \text{ rad/s}.$$

Conociendo ω_i y ω_f , es posible determinar la aceleración angular de la estrella. Considerando que 938 *años* en segundos es igual a $t = 2.96 \times 10^{10}$ s, su aceleración es

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega_i - \omega_f}{t} \\ \alpha &= \frac{(190.39 \text{ rad/s} - 262.3 \text{ rad/s})}{2.96 \times 10^{10} \text{ s}} \\ \alpha &= -2.42 \times 10^{-9} \text{ rad/s}^2. \end{aligned}$$

b) Por conservación de momento angular tenemos que

$$L_i = I_i\omega_i = I_f\omega_f = L_f,$$

donde $I_i\omega_i$ corresponden al momento de inercia y a la velocidad angular iniciales mientras que $I_f\omega_f$ corresponden al momento de inercia y a la velocidad angular final. El momento de inercia del pulsar se determina bajo la consideración de que es un cuerpo sólido (esfera) cuya distribución es homogénea y no existe pérdida de masa. Si el momento de inercia para una esfera sólida es $I = \frac{2}{5}MR^2$, y el momento angular es $L = I\omega$, el radio del pulsar hace 938 *años*, se obtiene resolviendo R_i a

partir de,

$$\begin{aligned}
 I_i \omega_i &= I_f \omega_f \\
 \frac{2}{5} M R_i^2 \omega_i &= \frac{2}{5} M R_f^2 \omega_f \\
 R_i^2 &= \frac{\omega_f}{\omega_i} R_f^2 \\
 R_i &= \sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_i}} R_f \\
 R_i &= \sqrt{\frac{190.39 \text{ rad/s}}{262.3 \text{ rad/s}}} (16 \text{ km}) \\
 R_i &= 13.62 \text{ km}.
 \end{aligned}$$

c) Para determinar cuándo dejará de girar el pulsar, tenemos que resolver $\omega_f = \omega_i + \alpha t$ para t cuando $\omega_f = 0$ y considerando que la aceleración permanece constante, resulta que

$$\begin{aligned}
 t &= -\frac{\omega_i}{\alpha} \\
 t &= -\frac{190.39 \text{ rad/s}}{(-2.42 \times 10^{-9} \text{ rad/s})} \\
 t &\approx 2494.72 \text{ años}.
 \end{aligned}$$

6.10. Frecuencia del X-ógeno

En 1970 Buhl y Snyder, usando el radiotelescopio de 12 m de Kitt Peak, Arizona, descubrieron una línea de emisión procedente de la nebulosa de Orión. La línea, a la cual llamaron X-ógeno, se detectó a una frecuencia de 89.19 GHz. Dos candidatos propuestos como responsables de dicha emisión fueron las moléculas HCO⁺ y HCN. En el HCO⁺ la distancia entre el H y el C es de 1.06 Å, y entre el C y el O de 1.115 Å. En el HCN la distancia entre el H y el C es de 1.065 Å, y entre el C y el N de 1.153 Å.

La frecuencia de emisión es, en una primera aproximación, el doble de la constante rotacional, B , de la molécula, con $B = h^2/(8\pi^2 I)$ donde I es el momento de inercia de la molécula y h la constante de Planck. Suponiendo que las dos moléculas son lineales, y usando la información dada anteriormente, identifica al X-ógeno.

Respuesta

Algunos valores que se usarán son:

$$amu = 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr},$$

$$h = 6.625 \times 10^{-27} \text{ erg/s},$$

$$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm},$$

$$m_o = 15.993 \text{ amu},$$

$$m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ gr} = 0.000548 \text{ amu}.$$

Para el HCO^+ tenemos los siguientes valores:

$$m_1 = 1.00977 \text{ amu},$$

$$m_2 = 12.01115 \text{ amu},$$

$$m_3 = 15.993 \text{ amu},$$

$$r_{12} = 1.06 \text{ \AA},$$

$$r_{13} = 2.175 \text{ \AA},$$

$$r_{23} = 1.115 \text{ \AA}.$$

De la definición de momento de inercia, dada por

$$I = \frac{m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (6.19)$$

tenemos que

$$I = \frac{13.62758 + 76.39605 + 238.81646}{29.01392};$$

lo cual da un valor de

$$I = 11.33387 \text{ amu \AA}^2,$$

que es igual a

$$I = 18.81423 \times 10^{-40} \text{ gr cm}^2.$$

Sustituyendo I en la ecuación de la constante rotacional tenemos que

$$B_e = \frac{h}{8\pi^2 I} = 44.597414 \text{ GHz}. \quad (6.20)$$

Entonces, la frecuencia de emisión es

$$\nu = 2B_e = 89.194828 \text{ GHz}. \quad (6.21)$$

La cual coincide, hasta los decimales dados en el enunciado, con la frecuencia del X-ógeno.

Los valores para el HCN son los siguientes:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1.00977 \text{ amu}, \\ m_2 &= 12.01115 \text{ amu}, \\ m_3 &= 14.00674 \text{ amu}, \\ r_{12} &= 1.065 \text{ \AA}, \\ r_{13} &= 2.218 \text{ \AA}, \\ r_{23} &= 1.153 \text{ \AA}. \end{aligned}$$

El momento de inercia es

$$I = \frac{m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2}{m_1 + m_2 + m_3} = 18.855010 \times 10^{40} \text{ gr cm}^2.$$

Sustituyendo en la ecuación de la constante rotacional tenemos que

$$B_e = 44.597414 \text{ GHz}.$$

Finalmente, encontramos una frecuencia de emisión de

$$\nu = 2B_e = 89.001921 \text{ GHz}.$$

Esta frecuencia difiere en 0.19 GHz de la línea del X-ógeno. Por lo tanto, podemos atribuir la emisión de 89.19 GHz a la molécula de HCO^+ .

6.11. Velocidad de expansión de remanente de supernova

Supongamos que una estrella con una masa inicial de $10M_\odot$ y con un radio de $10R_\odot$ explota como **supernova**. En la explosión se convierte el 1 % de la energía potencial, de la estrella original, en energía cinética de la envolvente de gas que sale expulsada por la explosión (conocida como **Remanente de Supernova**). Si suponemos que la masa de la envolvente es de $5M_\odot$ haz una estimación de su velocidad de expansión en km/s .

Respuesta

Se sabe que la energía potencial gravitacional, U , de una esfera sólida de masa, M , y radio, R , está dada por

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (6.22)$$

donde, en este caso, M es la masa de la estrella ($10M_{\odot}$), R es el radio de la estrella ($10R_{\odot}$) y G es la constante de la gravitación universal.

La energía cinética, K , que se deposita en la envoltura de gas de masa $m = 5M_{\odot}$, es el 1 % de la energía potencial dada por la ecuación (6.22), así que

$$K = 0.01 \times \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (6.23)$$

Por otro lado, la energía cinética, K , está dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (6.24)$$

donde m es la masa de la envoltura de gas ($5M_{\odot}$) y v es la velocidad de expansión. Finalmente, igualando la ecuación (6.23) con la ecuación (6.24) y despejando v resulta:

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 0.01 \times \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}}{m}}.$$

Sustituyendo valores tenemos que la velocidad de expansión de la envoltura de gas es

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 0.01 \times \frac{3}{5} \frac{(6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2) \times (10 \times 1.98 \times 10^{33} \text{ g})^2}{(10 \times 6.95 \times 10^{10} \text{ cm})}}{(5 \times 1.98 \times 10^{33} \text{ g})}} = 67.5 \text{ km/s}.$$

6.12. Ionización de gas por luz ultravioleta

La emisión ultravioleta de estrellas muy calientes ioniza el gas de su entorno formando lo que se conoce como una **región III**. Como el 90 % de los átomos del gas son de Hidrógeno (H) podemos, en una primera aproximación, suponer que tenemos una nube de Hidrógeno puro cuya densidad es constante a lo largo de la nube. En ese caso, aquellos fotones de la estrella central que tengan energías $h\nu > 13.6 \text{ eV}$ ionizarán el gas de su entorno. El radio de la zona ionizada puede determinarse a partir de la igualdad entre el número de ionizaciones debidas a la emisión ultravioleta y el número de recombinaciones en el gas que rodea a la estrella:

$$N_{\text{UV}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{st}}^3 \beta n^2, \quad (6.25)$$

donde N_{UV} es el número de fotones ionizantes emitidos por unidad de tiempo, por la estrella caliente; $\beta = 2.59 \times 10^{-13} \text{ cm}^3/\text{s}$ es el coeficiente de recombinación a todos los niveles del átomo de Hidrógeno, exceptuando el primero (las recombinaciones al nivel fundamental no deben tomarse en cuenta ya que conducen a la aparición de

un fotón ionizante que es absorbido inmediatamente por algún átomo vecino); n es la densidad numérica de átomos en el **medio interestelar** y R_{st} es el radio de la región ionizada. Al radio R_{st} se le conoce como **radio de Strömgren**. El número de recombinaciones por unidad de volumen y de tiempo es igual a $n_p n_e \beta$, donde n_p y n_e son, respectivamente, el número de protones y el número de electrones por unidad de volumen. Como dentro de la región III, el gas está casi totalmente ionizado, tenemos que $n_p \approx n_e \approx n$.

Para un medio interestelar de Hidrógeno puro, con distribución uniforme de densidad, el radio de Strömgren es

$$R_{st} = \left(\frac{3N_{UV}}{4\pi\beta n^2} \right)^{1/3}. \quad (6.26)$$

- a) ¿Cómo cambiaría el valor de R_{st} si la densidad fuera tres veces mayor que n ? En ese caso, ¿será mayor o menor la masa de gas ionizado en relación al caso en el que la densidad es n ? ¿Por qué?
- b) Supongamos ahora que el gas está en un cascarón delgado alrededor de la estrella ionizante y que el radio del cascarón es R_s , su densidad es n y su grosor es $\Delta R = \varepsilon R_s \ll R_s$. ¿Cuál es la relación entre R_s y el valor de R_{st} del inciso (a)? ¿Por qué?

Respuestas

- a) El radio de Strömgren, para una densidad de $3n$, es

$$R_{st}(3n) = \left(\frac{3N_{UV}}{4\pi\beta 3^2 n^2} \right)^{1/3} = \frac{1}{3^{2/3}} R_{st}(n) = 0.48 R_{st}(n). \quad (6.27)$$

La masa de gas ionizado es

$$M(3n) = \frac{4\pi}{3} [R_{st}(3n)]^3 3n = \frac{4\pi}{3} [R_{st}(n)]^3 0.48^3 3n = 0.33 M(n). \quad (6.28)$$

En los resultados anteriores vemos que si la densidad es mayor; R_{st} es menor. La masa ionizada también es menor en el caso de mayor densidad. Esto se debe a que a mayor densidad las recombinaciones se producen con mayor facilidad. Entonces el gas, para mantenerse ionizado, tiene que absorber más fotones por partícula y, por lo tanto, la masa de gas ionizado es menor.

- b) Si el gas ionizado está en un cascarón cuyo grosor es ΔR y cuyo radio es R , entonces, el volumen ionizado es $4\pi R_s^2 \Delta R$ y la igualdad entre el número de ionizaciones debidas a la emisión ultravioleta y la cantidad de partículas en el cascarón

es

$$N_{\text{UV}} = 4\pi R_s^2 \Delta R \beta n^2 = 4\pi R_s^3 \varepsilon \beta n^2 = \frac{4}{3}\pi R_{\text{st}}^3 \beta n^2, \quad (6.29)$$

donde

$$R_s = \frac{R_{\text{st}}}{(3\varepsilon)^{1/3}}. \quad (6.30)$$

En la ecuación anterior es claro que el caso del cascarón de gas ionizado lo podemos ver como si fuera el caso de una esfera de gas ionizado de radio R_{st} . Para entender el significado de la ecuación (6.30), vamos a calcular la cantidad de masa que hay en el cascarón, cuyo volumen también lo podemos expresar como

$$4\pi R_s^3 \varepsilon. \quad (6.31)$$

Entonces,

$$M_s = 4\pi R_s^3 \varepsilon n, \quad (6.32)$$

y empleando la ecuación (6.30), tenemos que

$$M_s = 4\pi \frac{R_{\text{st}}^3}{3\varepsilon} \varepsilon n = \frac{4}{3}\pi R_{\text{st}}^3 n. \quad (6.33)$$

La última expresión del lado derecho, además de ser la masa en el cascarón, también corresponde a la masa de gas ionizado en el volumen de una esfera de radio R_{st} ,

$$M_{\text{st}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{st}}^3 n, \quad (6.34)$$

y por lo tanto,

$$M_s = M_{\text{st}}. \quad (6.35)$$

Esto se debe a que, como la densidad es la misma en ambos casos, se está ionizando la misma cantidad de gas. Al radio R_{st} lo podemos considerar como un “radio equivalente” porque sería el radio que debería tener una esfera ionizada para tener la misma masa de material ionizado que el cascarón. Como $\varepsilon \ll 1$, entonces $R_s \gg R_{\text{st}}$. Esto significa que el radio equivalente es mucho menor que el radio del cascarón. Dicho de otra manera, si quisiéramos distribuir la masa de una esfera en un cascarón delgado, el radio del cascarón debería ser mucho mayor que el de la esfera.

6.13. Masa de una galaxia

Una **galaxia** espiral en forma de disco tiene un diámetro angular, θ , de $1.22'$; su distancia al observador, d , es de 40 megaparsecs y tiene una inclinación, i , de 60° entre la línea de visión y la línea perpendicular al disco de la galaxia. Debido

al **Efecto Doppler** se mide un corrimiento en la longitud de onda de 21 *cm* (línea del H neutro) de 0.01516 *cm* cuando se observa un extremo de la galaxia. ¿Cuál es la masa de la galaxia?

Respuesta

Como el diámetro angular cumple con que $\theta \ll 1$, entonces $\tan(\theta) \approx \theta$. Así, podemos expresar el diámetro angular de la galaxia en términos de la distancia, d , y su diámetro real, h , como

$$\theta = \frac{h}{d}. \quad (6.36)$$

Despejando, obtenemos que h es

$$h = \theta d,$$

y su valor

$$h = (1.22')(20 \text{ Mpc}) = (0.0003549 \text{ radianes})(20\,000\,000 \text{ pc}) = 14\,196 \text{ pc}.$$

El valor del radio es

$$r = h/2 = 7\,098 \text{ pc}.$$

Obtenemos la velocidad de la expresión para el corrimiento en longitud de onda debido al efecto Doppler a partir de

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} = \frac{v \sin(i)}{c}. \quad (6.37)$$

Despejando y sustituyendo valores tenemos que

$$v = \frac{\Delta\lambda c}{\lambda_0 \sin(i)} = \frac{(0.01516)(300\,000)}{(21)(\sin 60)} = 250 \text{ km/s},$$

y como podemos considerar que la fuerza de gravedad sobre el Hidrógeno es igual a la aceleración centrípeta que sufre, entonces,

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{M m}{r^2}. \quad (6.38)$$

Podemos despejar M y sustituir los valores de r y v que calculamos anteriormente. Haciendo esto resulta:

$$\begin{aligned} M &= \frac{r v^2}{G} = \frac{(7\,098 \text{ pc})(250 \text{ km/s})^2}{6.6739 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gr s}^2} \\ &= \frac{(2.1294 \times 10^{22} \text{ cm})(250 \times 10^5 \text{ cm/s})^2}{6.6739 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gr s}^2}. \end{aligned}$$

Realizando operaciones obtenemos la masa de la galaxia,

$$M = 1.99 \times 10^{44} \text{ gr} \approx 10^{11} M_{\odot}.$$

6.14. Curva de rotación de la Vía Láctea

En la Figura 6.1 se muestra un diagrama de la velocidad angular de rotación de la Vía Láctea, modelo básico, en función de la distancia al centro de la galaxia, en *Kiloparsecs*, el cual se puede emplear sólo de 3 Kpc a $\sim 10 \text{ Kpc}$. La distancia

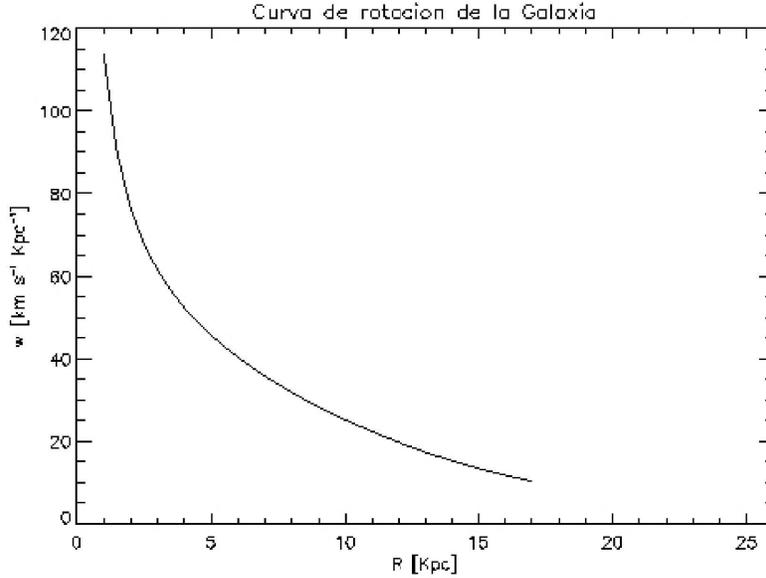


Figura 6.1: Diagrama de velocidad angular (modelo básico).

entre el Sol y el centro de la galaxia es de $\sim 8.5 \text{ Kpc}$ y la velocidad del Sol, en su órbita, es de 250 km/s . Vamos a suponer que observamos un objeto que está en una órbita interior a la del Sol (Figura 6.2). A la diferencia de velocidades en la dirección de la línea imaginaria que une al Sol con dicho objeto ($v_{1r} - v_{0r}$ de la Figura 6.2) se le llama velocidad respecto del **Estándar Local en Reposo** (v_{LSR} , donde LSR son las siglas de *Local Standard of Rest*).

- a) Demuestra que la velocidad de dicho objeto, v_{LSR} , se puede expresar como

$$v_{LSR} = R_o \text{sen}(l)(w - w_o), \quad (6.39)$$

donde R_o es la distancia del Sol al centro de la galaxia, w_o es la velocidad angular del Sol, w es la velocidad angular del objeto dado y l es su **longitud galáctica**.

- b) La velocidad de la nube molecular GRSMC45.46+0.05 es $v_{LSR} = 60 \text{ km/s}$ y su longitud heliocéntrica es $l = 45.46^\circ$. Haz una estimación de la distancia entre dicha nube y el centro de la galaxia.
- c) Demuestra que la distancia entre el Sol y dicho objeto se puede expresar como

$$d = R_o \cos(l) \pm \sqrt{R^2 - R_o^2 \sin^2(l)}. \quad (6.40)$$

- d) ¿Qué sentido tiene que, al resolver la raíz, se obtienen dos distancias?

Respuestas

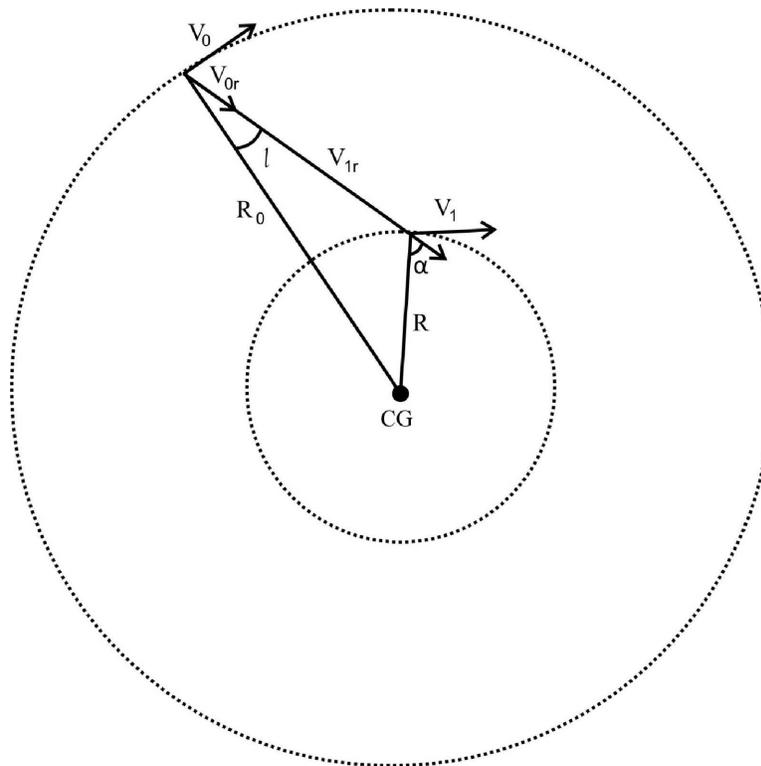


Figura 6.2: La órbita de la nube está representada por el círculo más pequeño y su distancia al centro de la galaxia es R .

a) De la Figura 6.2 tenemos que

$$v_{LSR} = v \cos(\alpha) - v_o \sin(l). \quad (6.41)$$

Ahora, vamos a trazar un triángulo del cual la línea que une al Sol con el centro de la galaxia es la hipotenusa. El cateto adyacente al ángulo l , R_{or} , lo trazamos extendiendo la línea Sol-nube hasta llegar a un punto, s . La condición para determinar este punto es que entre R_{or} y R_t se debe formar un ángulo recto. La longitud de R_t la podemos expresar en términos de R_o y en términos de R . Así obtenemos la siguiente igualdad:

$$R_t = R_o \sin(l) = R \cos(\alpha), \quad (6.42)$$

y, entonces,

$$\frac{\sin(l)}{R} = \frac{\cos(\alpha)}{R_o}. \quad (6.43)$$

Despejando $\cos(\alpha)$ y sustituyendolo en la ecuación (6.41) tenemos que

$$v_{LSR} = v \frac{R_o}{R} \sin(l) - v_o \sin(l).$$

Factorizando y tomando en cuenta que $w = \frac{v}{R}$ resulta que

$$v_{LSR} = R_o \sin(l)(w - w_o).$$

b) De la ecuación (6.39) despejamos w y obtenemos:

$$w = \frac{v_{LSR}}{R_o \sin(l)} + w_o. \quad (6.44)$$

Como $w_o = \frac{v}{R}$,

$$w_o = \frac{250 \text{ km/s}}{8.5 \text{ kpc}^{-1}} = 29.4 \text{ km/s kpc}.$$

Sustituyendo valores en la ecuación (6.44) tenemos que

$$w = \frac{60 \text{ km/s}}{8.5 \text{ kpc}^{-1} \sin(45.46^\circ)} + 29.4 \text{ km/s kpc},$$

y simplificando resulta que

$$w = 39.3 \text{ km/s kpc}.$$

De la Figura 6.1 tenemos que, para $w = 39.3 \text{ km/s kpc}$, la distancia entre la nube y el centro de la galaxia es $R \approx 6 \text{ kpc}$.

c) La distancia entre el Sol y la nube (r) es

$$r = R_{or} - R_r. \quad (6.45)$$

Por otro lado, la hipotenusa del triángulo CG -nube-s es R y los catetos son R_r y R_t . Entonces, por el teorema de Pitágoras, sabemos que

$$R^2 = R_r^2 + R_t^2. \quad (6.46)$$

La longitud de R_{ot} es $R_{ot} = R_o \cos(l)$. Despejando R_r de la ecuación (6.46), sustituyéndola en la ecuación (6.45) y, además, sustituyendo R_{ot} resulta:

$$r = R_o \cos(l) \pm \sqrt{R^2 - R_t^2}.$$

Sustituyendo R_t tenemos que

$$r = R_o \cos(l) \pm \sqrt{R^2 - R_o^2 \sin^2(l)},$$

que es la distancia entre el Sol y la nube.

d) Este método da como resultado dos distancias. Esto se debe a que puede haber dos objetos a una misma longitud galáctica pero uno está a una distancia $r = R_o \cos(l) + R_r$ y el otro a $r = R_o \cos(l) - R_r$. Sin embargo, sólo si la longitud galáctica es $l < 90^\circ$ y la distancia del objeto al centro de la galaxia es $R < R_o$ tienen sentido ambas distancias.

6.15. Betelgeuse y Rigel

Betelgeuse y Rigel son dos **estrellas** que están en la constelación de Orión. Sin embargo, a simple vista podemos ver que Rigel es una estrella azul y Betelgeuse es una estrella roja. Explica a qué se debe esta diferencia en los colores.

6.16. Presión en el centro de una estrella

Calcula la presión en el centro de una **estrella**, tomando la información de la sección 6.1, usando la condición de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho, \quad (6.47)$$

y bajo las siguientes suposiciones, que a pesar de ser burdas nos dan una buena idea del valor real y nos facilitan el cálculo:

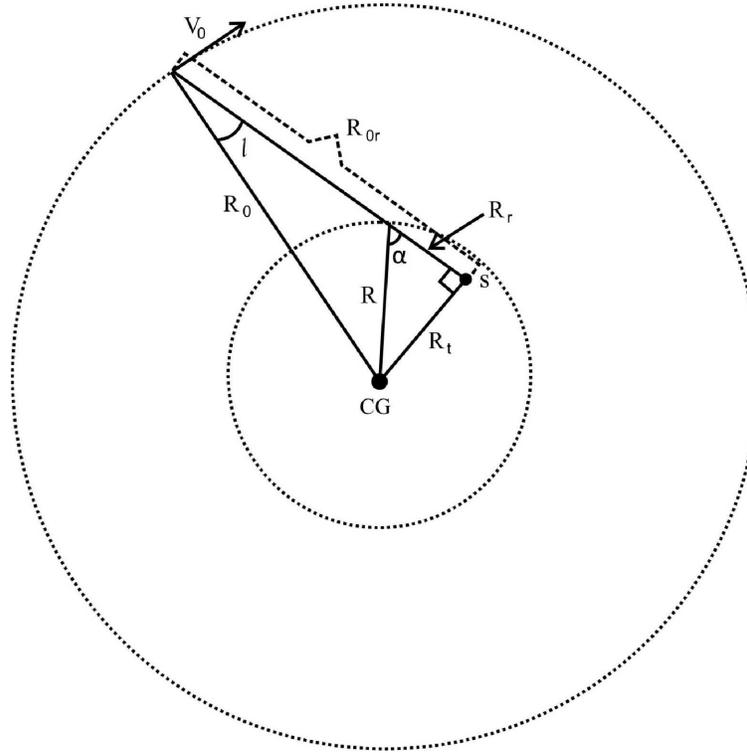


Figura 6.3: La distancia entre el Sol y la nube es $R_{or} - R_r$.

1. Consideremos la densidad de la estrella como la densidad promedio, $\rho = \rho_{prom}$, con

$$\rho_{prom} = \frac{M_{\star}}{\frac{4}{3}\pi R_{\star}^3}. \quad (6.48)$$

2. Consideremos que $M_r = \frac{1}{2}M_{\star}$ y $r = \frac{1}{2}R_{\star}$ (ambos valores, calculados como un promedio entre el centro y la superficie de la estrella).
3. Además, tomemos $dr = R_{\star}$ y $dP = P_{centro} - P_{superficie}$, con $P_{superficie} \ll P_{centro}$.

Apéndice A

A.1. Apéndice

Constantes

Radio polar terrestre	R_{\oplus}	=	6 357 <i>km</i>
Radio ecuatorial terrestre	R_{\oplus}	=	6 378 <i>km</i>
Radio medio de la Luna	R_L	=	1 738 <i>km</i>
Distancia media entre la Tierra y la Luna		=	384 401 <i>km</i>
Masa de la Tierra	M_{\oplus}	=	5.976×10^{27} <i>g</i>
Radio del Sol	R_{\odot}	=	6.9599×10^{10} <i>cm</i>
Masa del Sol	M_{\odot}	=	1.989×10^{33} <i>g</i>
Luminosidad del Sol	L_{\odot}	=	3.826×10^{33} <i>erg/s</i>
Unidad astronómica*	<i>UA</i>	=	1.49598×10^{13} <i>cm</i>
Parsec	<i>pc</i>	=	3.085678×10^{18} <i>cm</i>
Año luz		=	9.46053×10^{17} <i>cm</i>
Constante de gravitación	<i>G</i>	=	6.67×10^{-8} <i>dyn cm²/g²</i>
Velocidad de la luz	<i>c</i>	=	2.997925×10^{10} <i>cm/s</i>
Angstrom	\AA	=	10^{-10} <i>m</i>

* La Unidad Astronómica (*UA*) es la distancia media entre la Tierra y el Sol. En los cálculos que se hicieron en los problemas del texto usamos el valor redondeado de 1.5×10^{13} *cm* = 1.5×10^8 *km*.

A.2. Glosario

Absorción. En física, es la captación de luz, calor u otro tipo de energía radiante por parte de las moléculas. La radiación absorbida se convierte en calor; la radiación que no se absorbe es reflejada, y sus características cambian. Un ejemplo muy común, sucede cuando la luz solar incide sobre un objeto, suele ocurrir que algunas de sus longitudes de onda son absorbidas y otras reflejadas.

Acimut. El acimut de una estrella es el ángulo entre el norte y el punto en el que se intersecta el horizonte con la vertical de dicha estrella. En Astronomía, el acimut se mide hacia el Este y puede tener valores desde 0° hasta 360° .

Acreción. Es el proceso en el cual se agrega materia a un cuerpo celeste de forma que éste va aumentando su masa. Por ejemplo la acreción ocurre en algunas estrellas a las cuales cae gas y polvo del medio interestelar o bien material de una estrella compañera.

Afelio. En la órbita elíptica de un cuerpo alrededor del Sol se identifican particularmente dos puntos, el más cercano al Sol y el más lejano. El afelio es la posición en la que el objeto está en el punto más alejado.

Ángulo subtendido. Es el ángulo que se forma entre las líneas que unen a un observador con los extremos de un objeto. Si desde una distancia, d , observamos un objeto cuya altura es h , éste subtende, en dirección vertical, un ángulo θ tal que:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{h/2}{d}.$$

En el caso de objetos astronómicos, generalmente $\theta \ll 1$ con lo cual $\tan(\theta) \approx \theta$ y entonces,

$$\theta = \frac{h}{d}.$$

Si el tamaño del objeto no se modifica, el diámetro angular va aumentando a medida que nos acercamos, y viceversa(ver Figura A.1). Si el objeto está muy lejos, entonces el ángulo que subtende puede ser tan pequeño como el subtendido por un objeto más pequeño que está a una menor distancia de nosotros. Así, una moneda puede tapar al Sol.

Año luz (AL). Un año luz es una unidad de longitud y representa la distancia que recorre la luz en un año, la cual equivale a 9.46×10^{12} km.

Ascensión recta (AR). Es el arco del ecuador celeste medido hacia el Este desde el punto vernal (también llamado punto Aries) hasta el meridiano del objeto celeste. La AR se mide en horas y puede tomar valores de 0 a 24.

Asteroide. Objeto rocoso y metálico que orbita el Sol, pero que es demasiado pequeño para ser considerado planeta; aunque algunos llegan a medir unos cientos de

kilómetros. Se encuentra una gran cantidad de asteroides entre las órbitas de Marte y Jupiter en una región conocida precisamente como el Cinturón de Asteroides.

Atmósfera. Mezcla de varios gases que rodea un objeto celeste cuando éste cuenta con un campo gravitatorio suficiente para impedir que escapen.

CCD. Acrónimo de Charge-Coupled Device. Un CCD es un arreglo matricial de capacitores muy sensibles a la luz. Si incide luz sobre un capacitor, éste produce una pequeña corriente eléctrica que posteriormente se registra como un valor numérico. Así, el arreglo permite producir una matriz de valores de la intensidad de la luz registrada por los capacitores. Es decir, al igual que un negativo fotográfico, permite registrar imágenes (pero un CCD las guarda como arreglos numéricos). Los CCDs se usan en telescopios para registrar la imágenes de objetos celestes y también en las cámaras digitales.

Cenit. Es el punto de la esfera celeste que esta sobre el observador.

Círculo horario. El círculo horario de una estrella es el círculo mayor que pasa por dicha estrella y por los polos de la esfera celeste.

Círculo mayor. Es el círculo imaginario que resulta de la intersección de un plano imaginario con una esfera y que la divide en dos partes iguales (semiesferas).

Círculo menor. Es el círculo imaginario que se produce como resultado de la intersección de un plano imaginario con una esfera y que la divide en partes diferentes. Esto significa que el plano que la divide no pasa por el centro de la esfera.

Cometas. Son cuerpos pequeños, de algunos kilómetros de diámetro, compuestos de roca y hielo, que giran alrededor del Sol. Se cree que existe un gran número de estos más allá de la órbita de Plutón, en la Nube de Oort y en el cinturón de Kuiper. Los cometas salen de estas zonas por efecto de una perturbación gravitacional (posiblemente generada por una estrella), internándose en nuestro Sistema solar. Cuando un cometa está lejos del Sol, su núcleo es un gran bloque de hielo sucio. El cometa se calienta cuando se acerca al Sol y parte del hielo se evapora dejando gas y polvo a su alrededor. Así, cada vez que los cometas visitan al Sol, van perdiendo material. De ese material se forman dos colas; una de gas y otra de polvo. El viento solar y la presión radiativa de la luz del Sol son los factores que más influyen en la aparición de dichas colas. El gas es empujado por el viento solar, generando una cola. El polvo, además de ser empujado por el viento solar también es empujado por la presión radiativa de la luz del Sol y entonces se produce una segunda cola.

Cúmulo globular. Es un conjunto de estrellas ligadas gravitacionalmente. Un cúmulo globular tiene forma esférica y puede contener millones de estrellas. Los cúmulos globulares en nuestra galaxia se encuentran distribuidos en un halo esférico. Las estrellas que los constituyen son estrellas muy viejas, algunas casi tanto como

el Universo mismo.

Culminación. Cuando, para un observador dado, una estrella está en su posición más alta se dice que está en su culminación superior. Son muy pocas las estrellas que pueden estar en su cenit. Una estrella en su culminación superior está en el meridiano celeste del cenit del observador y precisamente en este momento la estrella está en su posición más próxima al cenit de dicho observador. En la culminación inferior, la estrella se encuentra lo más cerca posible al **nadir**.

Curva de Rotación. Las estrellas del disco galáctico, entre ellas el Sol, giran en torno al centro galáctico. La velocidad a la que giran en sus órbitas se puede expresar como función de la distancia al centro galáctico. A tal relación se llama curva de rotación.

Declinación. La declinación (δ) de una estrella es la distancia angular, medida a lo largo del círculo horario de dicha estrella, desde la estrella al ecuador celeste. La declinación toma valores negativos (de -90° a 0°) para estrellas que están al Sur del ecuador celeste y valores positivos (de 0° a 90°) para estrellas que están al Norte del ecuador celeste. Por lo anterior, es claro que la declinación de un punto que está sobre el ecuador es cero, la del punto que está sobre el polo norte es 90° y la del que está sobre el polo sur es -90° . Las líneas imaginarias de declinación, sobre la esfera celeste, son el equivalente a las líneas imaginarias de **latitud** geográfica, sobre la Tierra.

Diámetro angular. Es el **ángulo subtendido** por el diámetro real de un objeto que, sobre la esfera celeste, tiene forma circular. En el caso de objetos con forma elíptica también se emplea el término diámetro angular pero se especifica a qué diámetro se refiere, es decir, si al diámetro correspondiente al eje mayor, al eje menor o al promedio. En el caso de los planetas se usan los términos diámetro ecuatorial, diámetro polar y diámetro promedio.

Día Sideral. Se dice del tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos de una misma estrella por el **meridiano** del lugar. Para calcular el tiempo sideral no se emplea el paso de cualquier estrella sino el paso del **punto vernal**.

Día Solar. Se dice del intervalo de tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el meridiano del lugar.

Diagrama Hertzsprung-Russel (HR). Es un gráfico que relaciona la temperatura de una estrella con su brillo. En el diagrama HR una estrella se representa con un punto. La parte superior del diagrama corresponde a las estrellas más luminosas. La parte izquierda corresponde a las estrellas más calientes. La mayoría de las estrellas se encuentra en una banda diagonal a la que se le conoce como Secuencia Principal. Un menor número de estrellas se ubica en lo que se conoce como la zona de las gigantes y super gigantes. Hay otra zona en la que quedan las enanas blancas. El diagrama HR es importante porque su estudio permite, entre otras cosas, hacer

estimaciones de las edades de las estrellas y entender mejor como evolucionan. También es una herramienta para hacer estimaciones de las distancias a cúmulos estelares.

Dispersión. Fenómeno de separación de las ondas de distinta frecuencia al atravesar un material, cualquier separación de ondas de distintas frecuencias puede llamarse dispersión.

Eclipse. Es el fenómeno que ocurre cuando un objeto celeste pasa por la sombra que genera otro. Nuestro planeta, la Tierra, interviene en dos eclipses llamados eclipse de Sol y eclipse de Luna. El eclipse de Sol ocurre cuando la sombra de la Luna cae sobre algunas zonas de la Tierra. El eclipse de Luna ocurre cuando la Luna entra en la zona de sombra de la Tierra.

Eclicptica. Es la trayectoria que sigue el Sol, a lo largo del año, en la esfera celeste.

Ecuador. Es la intersección del **plano ecuatorial** con la superficie de la Tierra.

Efecto Doppler. El efecto Doppler es el incremento o disminución de la longitud de onda, de una onda emitida por un objeto en movimiento, en relación a la longitud de onda que recibe un observador.

Un ejemplo muy claro del efecto Doppler ocurre cuando escuchamos la sirena de un vehículo que pasa cerca de nosotros. El cambio del tono de la sirena nos indica que el vehículo se dirigió hacia donde estábamos y después se alejó. Cuando el vehículo se acerca, el tono de la sirena se hace más agudo y, cuando el vehículo se aleja, el sonido se hace más grave. Cuando el vehículo se acerca escuchamos un tono más agudo porque la longitud de onda se hace más corta, como si se comprimiera. En cambio, cuando el vehículo se aleja, la longitud de onda se alarga.

Lo mismo ocurre cuando un objeto emite luz. Recordemos que, de los colores que vemos a simple vista, el azul es el de longitud de onda más corta y el rojo el de longitud de onda más larga. En un ejemplo burdo pero ilustrativo podemos imaginarnos que un objeto emite sólo luz amarilla pero está en movimiento respecto de un observador. Si el objeto se acercara al observador a gran velocidad entonces vería luz verde o azul (en lugar de amarilla) y si el objeto se alejara, vería luz roja. Al resultado de un cambio en la longitud de onda por el efecto Doppler se le llama corrimiento Doppler (o también desplazamiento Doppler). Se dice “corrimiento al azul” si la longitud de onda se acorta y “corrimiento al rojo” si se alarga. La diferencia entre la longitud de onda con corrimiento Doppler (λ) y la longitud de onda en reposo (λ_0) la vamos a expresar como $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$. Para el caso no relativista, $\Delta\lambda$ depende de la velocidad (v) con la que el objeto se acerca o se aleja:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}, \quad (\text{A.1})$$

donde c es la velocidad de la luz.

Eje polar. La Tierra gira como un cuerpo sólido alrededor de un eje imaginario que pasa por los polos y por el centro de la Tierra. El eje de rotación de la Tierra está inclinado 23.5° respecto al **plano de la eclíptica**. En una primera aproximación, el eje de rotación de la Tierra apunta a un punto fijo de la esfera celeste, que actualmente está muy cercano ($\sim 1^\circ$) a una estrella llamada “estrella polar”.

Electrón. Tipo de partícula elemental de carga negativa que forma parte de la familia de los leptones y que, junto con los protones y los neutrones, forma los átomos y las moléculas. Los electrones están presentes en todos los átomos y cuando son arrancados del átomo se llaman electrones libres.

Energía cinética. Energía que un objeto posee a su movimiento. La energía cinética depende de la masa y la velocidad del objeto según la ecuación:

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

donde m es la masa del objeto y v la velocidad del mismo.

Energía potencial. Energía almacenada que posee un sistema como resultado de las posiciones relativas de sus componentes. Si se mantiene un objeto a una cierta distancia, por ejemplo del suelo, el sistema formado por el objeto y la Tierra tiene una determinada energía potencial, U , la cual se define como

$$U = Wh = mgh,$$

donde W y m son el peso y la masa, respectivamente, de un objeto localizado a una distancia h sobre algún punto de referencia.

Energía térmica. Energía que se transfiere de un cuerpo a otro debido a su diferencia de temperaturas. También recibe el nombre de calor.

Escala de altura. La densidad de la atmósfera, ρ , para diferentes gases depende de la altura, h , a la cual se mide. Suponiendo que los efectos de temperatura son constantes, dicha dependencia está dada por

$$\rho = \rho_0 e^{-\left(\frac{h}{H}\right)},$$

donde ρ_0 es la densidad media al nivel del mar, h es la altura a la cual se mide la densidad y H es la escala de altura (la cual toma diferentes valores para cada gas). El valor de H define la altura a la que la presión ha decrecido en un factor de e (2.71).

Escala de placa. La escala de placa es un parámetro muy empleado en Astronomía observacional. Se llama escala de placa porque, antes del empleo de CCDs y cámaras digitales, la imagen captada por los telescopios se registraba en placas fotográficas. La escala de placa es la relación entre el ángulo (α) que subtende un

objeto observado y el tamaño (s) que tendría este objeto en la placa fotográfica (ver Figura A.3).

La escala de placa se puede expresar en "/mm a partir de

$$s = f \alpha, \quad (\text{A.2})$$

donde f es la distancia focal del telescopio.

Esfera celeste. Es una esfera imaginaria en la que están los objetos celestes con la Tierra en el centro. El polo norte y el polo sur celestes corresponden a la intersección del eje polar con la esfera celeste. Sobre la esfera celeste también se define un ecuador que es el círculo mayor que resulta de la intersección del plano ecuatorial terrestre con la esfera celeste.

Espectro. Un espectro es una gráfica en la que se representa la distribución de la intensidad de la luz, procedente de un objeto, en función de la longitud de onda.

Mediante un prisma podemos obtener, de una manera sencilla, un espectro y lo primero que podemos ver es que no todos los colores tienen la misma intensidad. Cuando vemos las estrellas a simple vista, nos podemos dar cuenta que algunas son rojas mientras que otras son azules. Si pasáramos su luz por un prisma nos daríamos cuenta de que, efectivamente, un color es más intenso que los otros.

En Astronomía se emplean prismas y rejillas, o la composición de ambos, para obtener los espectros de objetos celestes. Los espectros muestran, además de diferentes intensidades en los colores, también algunas líneas más brillantes y otras líneas más oscuras. A dichas líneas se las llama **líneas espectrales**.

Estrella. Es una bola de gas que brilla con luz propia y cuya energía es generada por las reacciones nucleares que ocurren en su interior. La masa mínima de una estrella es de 0.08 veces la masa del Sol (M_{\odot}), mientras que las más masivas son del orden de 100 M_{\odot} . El Sol es la estrella más cercana a nosotros.

Estrella Binaria. Es un sistema compuesto por dos estrellas que están unidas por su atracción gravitacional y giran en torno a un mismo punto que es el centro de masas. La gran mayoría de las estrellas no están solas sino formando sistemas binarios, o estrellas binarias.

Estrella de Neutrones. Cuando una estrella muy masiva explota como supernova, su parte central puede colapsarse hasta alcanzar densidades comparables a las de un núcleo atómico, formando lo que se conoce como una estrella de neutrones. Estas estrellas tienen una masa del orden de 1.4 veces la de Sol comprimida en un radio del orden de 10 km .

Flujo, densidad de flujo. Generalmente se utiliza la palabra flujo para referirse a la densidad de flujo. El flujo que registra un observador, en una longitud de onda dada, es la potencia (o energía por unidad de tiempo) recibida por unidad de área. Estrictamente hablando, deberíamos decir potencia radiativa, porque es la potencia

de la luz radiada por un objeto que capta el observador por unidad de área. Las unidades del flujo son $[F] = \text{erg/s cm}^2$ (ver **luminosidad**).

Flujo total. Es el flujo integrado sobre todas las longitudes de onda.

Fotón. Cantidad mínima de energía de la luz u otra radiación electromagnética. Ésta se comporta como una onda y a veces se comporta como si estuviera compuesta por un haz de pequeñas partículas o cuantos de energía. La energía E de un fotón se expresa mediante la ecuación:

$$E = h\nu,$$

donde h es la constante de Plank y ν es la frecuencia (numero de oscilaciones por segundo) de la luz.

Galaxia. Es un inmenso conjunto de estrellas, gas y polvo que están ligados gravitacionalmente. De acuerdo a su apariencia, las galaxias se clasifican en elípticas, espirales e irregulares. La galaxia que nosotros habitamos es una galaxia espiral conocida como Vía Láctea.

Horizonte y plano horizontal. El plano horizontal de un observador es un plano imaginario perpendicular a la línea que une a dicho observador con su **cenit**. El horizonte es la intersección de este plano con la esfera celeste. Como en muchos lugares hay montañas el horizonte que ve un observador no necesariamente coincide con la definición astronómica de horizonte.

Latitud geográfica Se llama latitud geográfica a la distancia angular desde el ecuador a un lugar sobre la Tierra, medida a lo largo del meridiano (de dicho lugar). La latitud toma valores negativos (de -90° a 0°) para lugares que están al sur del ecuador y valores positivos (de 0° a 90°) para lugares que están al norte del ecuador.

Ley de los cosenos. Si a , b y c son las longitudes de los lados de un triángulo cualquiera, y γ denota la medida del ángulo comprendido entre los lados de longitud a y b , se tiene que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

que es la expresión matemática de la ley de los cosenos.

Leyes de Kepler. Son tres leyes formuladas por Johannes Kepler a principios del siglo XVII sobre el movimiento de los planetas. Estas leyes están basadas en los datos obtenidos por Tycho Brahe.

La primera ley dice que los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas y el Sol está en uno de los focos de cada elipse.

La segunda ley de Kepler dice que el radio vector, que une al Sol con un planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales. Matemáticamente podemos expresar la segunda ley como:

$$\frac{1}{2} (\omega_1 r_1^2) = \frac{1}{2} (\omega_2 r_2^2) = \text{cte}, \quad (\text{A.3})$$

donde ω es la velocidad angular del planeta y r la magnitud del radio vector.

La tercera ley de Kepler dice que el período de revolución depende de la distancia al Sol, estrictamente hablando depende del semieje mayor (a), de la siguiente manera:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_{\odot} + m)}{4\pi^2}, \quad (\text{A.4})$$

donde G es la constante de la gravitación universal, M_{\odot} es la masa del Sol y m la masa del planeta cuya órbita tiene un semieje mayor a .

Si la masa m es muy pequeña en relación a la masa M_{\odot} entonces la ecuación(A.4) se puede expresar como:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_{\odot})}{4\pi^2} = cte. \quad (\text{A.5})$$

El lado derecho queda expresado sólo en términos de la masa del Sol y de otros valores que no dependen de las características de los cuerpos que giren alrededor de él. Es decir, el resultado del cociente $\frac{a^3}{T^2}$ es el mismo para cualquier objeto de masa $m \ll M_{\odot}$ que orbite al Sol y, por lo tanto, es un valor constante. Podemos expresar el cociente del lado izquierdo de la ecuación (A.5) en $a\tilde{m}os^2$ y UA^3 . Para la Tierra tenemos que $a = 1UA$ y $T=1$ año, entonces,

$$\frac{a^3}{T^2} = 1 \frac{[UA^3]}{[a\tilde{m}o^2]}, \quad (\text{A.6})$$

y como vimos de la ecuación(A.5) que ese valor es constante, entonces, para cualquier cuerpo que orbita al Sol se cumple que

$$a^3[UA^3] = T^2[a\tilde{m}o^2]. \quad (\text{A.7})$$

Esta expresión es muy sencilla y nos permite calcular directamente la distancia entre el Sol y cualquier objeto que lo orbite, si conocemos su período de traslación.

Leyes de Newton. La mecánica se basa en tres leyes naturales, enunciadas por primera vez, de un modo preciso, por sir Isaac Newton (1643-1727) y publicadas en 1686. Estas leyes dicen lo siguiente:

Primera ley de Newton: Un cuerpo en reposo permanece en reposo, y un cuerpo en movimiento permanece en movimiento uniforme, a menos que actúe sobre él una fuerza externa desequilibrada.

Segunda ley de Newton: Siempre que una fuerza desequilibradora actúa sobre un cuerpo, produce una aceleración en su misma dirección que es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

Tercera ley de Newton: Para toda acción debe existir una reacción igual y opuesta.

Línea de visión. Se le llama a la línea recta que va del ojo del observador al objeto observado.

Línea Espectral. Las líneas brillantes que aparecen en ciertas longitudes de onda de un espectro son líneas espectrales en emisión y las líneas oscuras son líneas en absorción. Las líneas brillantes resultan de que el observador recibe una mayor intensidad de luz con esas longitudes de onda, mientras que las líneas oscuras se deben a que en esas longitudes de onda se recibe menos luz debido a la absorción del medio que está entre el objeto emisor y el observador.

Lluvia de Estrellas. Una lluvia de estrellas se produce cuando la Tierra pasa cerca de la trayectoria de un cometa, aunque éste haya pasado ya hace mucho tiempo, y las partículas de polvo del cometa caen a la Tierra. Las partículas al entrar a la atmósfera a gran velocidad, se calientan por la fricción dejando un destello luminoso conocido como “estrella fugaz”. Como el cometa deja una gran cantidad de partículas se pueden llegar a ver muchas estrellas fugaces semejando una lluvia de estrellas. Las partículas pueden ser tan pequeñas como un grano de azúcar.

Longitud galáctica. La longitud galáctica (l) de una estrella es el ángulo entre la línea recta que une al Sol con el centro galáctico y la línea recta que une al Sol con dicha estrella.

Luminosidad. La luminosidad (L) de una estrella es la cantidad de energía por segundo que emite dicha estrella ($erg\ s^{-1}$). La luminosidad está relacionada al flujo (F) por $L = 4\pi R^2 F$, donde R es el radio de la estrella.

Magnitud. La magnitud es un parámetro que se emplea en Astronomía para cuantificar el brillo de una estrella. El término de magnitud fue introducido por Hiparco en el siglo II a.C., quien construyó una escala de magnitudes basada en los objetos visibles a simple vista; asignó a las estrellas más brillantes una magnitud 1 y a las más débiles una magnitud 6.

El problema de la clasificación de Hiparco reside en que el “brillo” no tenía una expresión en función de parámetros físicos. En 1856, Norman R. Pogson propuso un método similar en el cual en vez de brillo se usa el flujo que recibe el observador. Pogson definió una escala en la que $F_1 = 100 \times F_6$, donde F_1 es el flujo de una estrella de magnitud 1 y F_6 es el flujo de una estrella de magnitud 6.

Magnitud aparente. Se refiere al “brillo observado” de un objeto celeste. Esto es, el **flujo** que recibimos de dicho objeto ($F = [erg\ s^{-1}\ cm^{-2}]$). La magnitud aparente se define como $m = -2,5 \log \frac{F}{F_o}$, donde F_o es un flujo de referencia, el cual corresponde a una estrella de magnitud cero.

Magnitud absoluta. Es la magnitud que tendría una estrella si estuviera situada a una distancia de 10 *parsecs*.

Materia oscura. Casi toda la información que recibimos del universo es por

medio del estudio de los fotones emitidos por los objetos celestes. A la diferencia entre la masa inferida a través de la radiación recibida, “masa luminosa”, y la masa total, se le denomina materia oscura, cuya existencia es inferida solamente por su fuerza de gravedad.

Medio Interestelar (MI). Al espacio entre las estrellas se le llama Medio interestelar (MI). El MI no está vacío sino que contiene gas y **polvo** en forma de nubes individuales y de un medio difuso. Una de las nubes de gas y polvo más conocidas es la Nebulosa de Orion. Gran parte de la materia del universo que observamos está en forma de gas (en las estrellas, en el MI, etc). El gas del MI está compuesto principalmente por Hidrógeno atómico aunque también tiene otras especies atómicas como el oxígeno (O), carbono (C), etc. En el gas también hay diversas moléculas, de las cuales la más abundante es el H_2 . Hasta la fecha se han detectado más de 120 diferentes moléculas, dentro de las que podemos mencionar agua (H_2O), monóxido de carbono (CO) y metanol (CH_3OH). El medio interestelar también contiene rayos cósmicos y campos magnéticos.

Meridiano. El meridiano de un lugar dado es la semicircunferencia de un **círculo mayor** que va de un polo de la Tierra a otro pasando sobre dicho lugar. Los meridianos los podemos imaginar como las líneas que deberíamos trazar imaginariamente sobre la Tierra para producir rebanadas como las que hacemos a un melón. El meridiano celeste es el círculo mayor que pasa por los polos y el cenit del lugar. Para visualizar los meridianos celestes también podemos, imaginariamente, trazar sobre la esfera celeste rebanadas tipo melón.

Meteoro. Cuerpo sólido que gira alrededor del Sol y da lugar a una estrella fugaz cuando en su trayectoria penetra en la atmósfera de la Tierra. El tamaño de la gran mayoría de los meteoros es el de un grano de polvo, pero los hay mayores, sin ningún límite definido; los más grandes pueden tener una masa de varias toneladas.

Molécula. Es la partícula más pequeña de una sustancia que mantiene las propiedades químicas específicas de esa sustancia. Si una molécula se divide en partes aún más pequeñas, éstas tendrán una naturaleza diferente de la sustancia de original.

Momento de inercia. Resistencia que un cuerpo en rotación opone al cambio de su velocidad de giro. A veces se denomina inercia rotacional, el cual se representa por I definida como:

$$I = mr^2,$$

donde m es la masa del objeto y r es la distancia de la partícula al eje de rotación.

Nadir. Es el punto imaginario en la bóveda celeste que está bajo el observador y cuya posición es opuesta al **cenit**. Si recordamos que la bóveda celeste se extiende por debajo de nuestro horizonte y nos imaginamos nuestro horizonte como un vidrio transparente en el que estamos parados, entonces, el nadir es el punto de la esfera

celeste que está debajo de nuestros pies.

Nebulosa planetaria. En la etapa final de la vida de una estrella, se expulsan las capas externas, mientras que el núcleo se contrae a su estado más compacto. Las estrellas que no explotan como supernova, por ser de masas menores a $3 M_{\odot}$, también expulsan una gran cantidad de material al medio interestelar. Al cascarón de gas y polvo que se forma en torno a dichas estrellas se le llama nebulosa planetaria. Se les llama planetarias porque en las primeras observaciones (con telescopios de menor **resolución** que los actuales) parecían ser objetos “esféricos” como los planetas.

Nubes moleculares (NM). Son regiones con temperaturas típicas de 10 a 20 K , densidades de entre 1 y 10^3 partículas/ cm^3 y tamaños de hasta varias decenas de *parsecs*. Su composición es de $\sim 90\%$ Hidrógeno molecular, $\sim 10\%$ de He y trazas de diversas moléculas como CO, NH₃, H₂O, etc. Se encuentran principalmente en el plano galáctico.

Nutación. Es una oscilación del eje terrestre debida a la influencia gravitacional de la Luna. Una oscilación del eje polar, debida a la nutación, tiene un período de 18 *años* y 220 *días*. El movimiento de nutación y el de **precesión** se superponen.

Parábola y superficie parabólica. Las superficies parabólicas son muy útiles en Astronomía. Muchos telescopios y radiotelescopios usan paraboloides de revolución como superficies reflectoras. Un paraboloide de revolución idealmente hace converger a un sólo punto, llamado foco, una onda plana que incide paralela al eje de dicho paraboloide. Además, todos los haces reflejados, por los diferentes elementos de área de la superficie, idealmente, recorren la misma distancia hasta el foco.

Paralelo. El paralelo de un lugar dado es la circunferencia de un círculo menor que pasa por dicho lugar y que es paralelo al plano ecuatorial.

Parsec. El *parsec* (pc) es una unidad de longitud que se usa mucho en Astronomía y que equivale a la distancia desde la cual el radio medio de la órbita terrestre abarca un ángulo de $1''$ (1 segundo de arco). Más concretamente: $1 pc = 3.09 \times 10^{16} m = 3.26 años luz = 2.06 \times 10^5 UA$ (ver Figura A.2).

Perihelio. Es la posición en la que un objeto que está en órbita alrededor del Sol se encuentra a la distancia mínima.

Período sidéreo. Es el tiempo que tarda un planeta u otro objeto, que gira en torno al Sol, en dar una vuelta completa en su órbita, tomando como referencia a las estrellas.

Período sinódico. Es el tiempo transcurrido entre dos configuraciones similares de un planeta, la Tierra y el Sol. También se usa para otros objetos que giran alrededor del Sol y depende de la diferencia entre los períodos sidéreos del objeto en cuestión y del período sidéreo de la Tierra.

Peso. Los términos peso y masa se utilizan indistintamente en el lenguaje coti-

diano. Sin embargo, sí hay diferencia entre ellos: el peso de un objeto es igual a la fuerza de gravedad que actúa sobre dicho objeto mientras que la masa del objeto, es la cantidad de materia que éste tiene. Para encontrar el peso de un objeto (en *Newtons*), se multiplica la masa (en *kilogramos*) por la aceleración (en m/s^2) debida a la fuerza de gravedad.

Planeta. Cuerpo celeste que no tiene luz propia y que orbita alrededor del Sol o cualquier otra estrella. En nuestro Sistema solar, los cuatro planetas más cercanos al Sol son sólidos, mientras que los lejanos son líquidos y gaseosos (a excepción de Plutón). Los cometas y asteroides, por su tamaño no caen en la categoría de planetas. A los asteroides, por su tamaño, se les conoce como “planetas menores”. Además de los planetas del sistema solar hay planetas, llamados extrasolares, girando en torno a otras estrellas. Hasta ahora se han detectado cerca de 200 planetas extrasolares.

Plano de la eclíptica. Es un plano sobre el cual la Tierra describe su movimiento de traslación alrededor del Sol, ver Eclíptica.

Plano ecuatorial. Es el plano imaginario que pasa por el centro de la Tierra y es perpendicular al eje polar.

Plano horizontal. Ver **Horizonte**.

Polo. El polo geográfico es un punto en el que se intersectan el eje polar y la superficie de la Tierra. Dado que la Tierra es como un imán también tiene dos polos magnéticos, pero la ubicación de estos difiere de la de los polos geográficos.

Polvo interestelar. El polvo es una componente importante del MI, se encuentra en nubes individuales en los brazos espirales de las galaxias. Este polvo comprende aproximadamente el 10 % de la materia interestelar. Los granos de polvo están constituidos principalmente de Carbono y Silicio y tienen tamaños desde ~ 10 nanómetros hasta ~ 1 micra. En algunas imágenes astronómicas, como en la nebulosa Cabeza de Caballo que está en la constelación de Orion, se ven zonas oscuras en las que aparentemente no hay estrellas. Lo que en realidad ocurre es que una nube de polvo absorbe la luz de las estrellas que están detrás de ella.

Precesión. Este efecto se debe al hecho de que la Tierra no es completamente esférica sino que es un elipsoide irregular, aplastado en los polos. La precesión es un movimiento circular que realiza el eje terrestre y que completa en un período en 25 800 *años*. Este movimiento produce variaciones de las coordenadas astronómicas.

Protón. Partícula nuclear con carga positiva igual en magnitud a la carga negativa del electrón; junto con el neutrón, está presente en todos los núcleos atómicos.

Pulsar. Estrella de neutrones que gira rápidamente y que emite un intenso haz de radiación electromagnética. Para un observador, ese haz es como la luz de un faro que verá como si fueran pulsos de luz. Debido a eso se les llama pulsares. Las estrellas de neutrones tienen un diámetro del orden de 10 *km* y poseen un campo

magnético muy intenso. Se cree que los pulsares se forman en algunas explosiones de supernovas.

Punto vernal. El **plano de la eclíptica** está inclinado 23.5° respecto del **plano ecuatorial**. Entonces, el plano eclíptico y el **ecuador** celeste se intersectan en sólo dos puntos. El punto vernal es el punto de intersección en el que el movimiento del Sol sobre la esfera celeste va de sur a norte. Al punto vernal también se le llama primer punto de Aries.

Región HII. Una región HII es una nube de gas ionizado por la radiación ultravioleta de estrellas jóvenes y masivas. Las regiones HII tienen temperaturas de $\sim 10\,000\text{ K}$, densidades típicas de entre 100 y 1 000 partículas cm^{-3} y tamaños de 0.1 a $\sim 1\text{ pc}$.

Remanente de supernova (RSN). A la nube de gas y polvo que se produce tras una explosión de supernova se le llama Remanente de Supernova. El material que forma una RSN viaja a velocidades de varios miles de kilómetros por segundo.

Resolución angular. La resolución angular es la capacidad de distinguir dos estrellas cercanas, y no verlas como una sola. En un dispositivo óptico la resolución angular es

$$\phi \approx \frac{\lambda}{D}, \quad (\text{A.8})$$

donde λ es la longitud de onda y D , el diámetro del objetivo óptico del instrumento con el que se observa. La resolución es mejor entre más pequeño sea el valor de ϕ . Dicho de otra manera, vamos a poder distinguir más detalles de los objetos que observemos. En la práctica, la resolución está limitada por la influencia de la atmósfera y, en la actualidad, la mejor resolución que se puede alcanzar, en observaciones hechas en la superficie terrestre, es de varias décimas de segundo de arco.

Rotación, Movimiento. Movimiento que obliga a todos los puntos de un sólido a describir arcos de igual amplitud pertenecientes a circunferencias cuyo centros se hallan en una misma recta o eje de jiro, que puede ocupar cualquier posición en el espacio. Para la Tierra el movimiento de rotación dura 24 *hrs*.

Solsticio. Punto de la eclíptica en el que el Sol está más alejado del ecuador celeste. En dos puntos de la eclíptica se produce esta máxima distancia, uno ocurre en invierno y el otro en verano. En el verano el Sol llega a su posición extrema norte, en relación al ecuador celeste; y en el invierno, a su posición extrema sur.

Supernova (SN). Explosión que puede ocurrir al final de la vida de una estrella. Hay dos clases de supernova: SN tipo I y SN tipo II. La SN tipo I es una explosión por la acreción del material en un sistema binario. La SN tipo II es la explosión de una estrella masiva ($M \geq 3M_\odot$), en la que una gran parte de la masa de la estrella original se lanza al espacio a grandes velocidades. Durante unos días,

la supernova puede brillar más que toda la galaxia que habita. La última explosión de supernova ocurrida en nuestra galaxia fue observada en el año 1604. Sin embargo, la distancia a este objeto celeste es de ~ 13000 años luz; entonces, la explosión en realidad ocurrió miles de años antes de ser registrada en la Tierra. Una SN tipo II deja una estrella colapsada que, dependiendo de su masa, será un hoyo negro ($M_{re} > 1,4M_{\odot}$) o una **estrella de neutrones** ($M_{re} \leq 1,4M_{\odot}$).

Telescopios. El telescopio es un instrumento óptico que aumenta el **ángulo subtendido** por un objeto. Esto permite que a objetos que están a grandes distancias, y por lo cual a simple vista subtenden ángulos muy pequeños, los veamos subtender ángulos más grandes. Por eso podemos verlos como si estuvieran más cerca de nosotros.

El funcionamiento básico de un telescopio consiste en captar haces de luz lo más separados posible entre sí pero procedentes de un mismo objeto y concentrarlos en un solo punto. Posteriormente, por medio de un ocular, se puede ver la imagen aumentada. A los telescopios que utilizan un espejo, para captar la luz, se les llama telescopios reflectores; a los que utilizan una lente se les conoce como telescopios refractores.

Temperatura efectiva. La temperatura efectiva de un objeto dado es la temperatura a la que debería estar un cuerpo negro para emitir el mismo **flujo total** que el que observamos del objeto. Entonces, la temperatura efectiva (T_{ef}) de una estrella se relaciona con el **flujo** mediante la ecuación $F = \sigma T_{ef}^4$, donde σ es la constante de Stephan-Boltzmann.

Temperatura de brillo. La temperatura de brillo de un objeto, en una longitud de onda dada (λ_o), es la temperatura a la que debería de estar un cuerpo negro para emitir, el mismo flujo (en λ_o) que el objeto.

Tipo Espectral. Las estrellas se clasifican con respecto a su espectro en siete clases (O, B, A, F, G, K y M). Como el espectro de una estrella depende de la temperatura en la superficie de la misma, entonces la clasificación espectral hace una distinción de las estrellas por su temperatura. Las estrellas de clase O tienen las temperaturas más altas mientras que las de clase M, las más bajas. Dentro de cada clase hay estrellas con diferentes temperaturas. Por eso, cada clase se divide en subclases denotadas por un número después de la letra. Por ejemplo, las temperaturas de las estrellas de clase O3 son de $\sim 35\,000\ K$ mientras que las temperaturas de las estrellas O9 son de $\sim 20\,000\ K$. Las estrellas de la clase M8 son de $\sim 2\,500\ K$. El Sol tiene una temperatura de aproximadamente $5\,700\ K$ y su clase espectral es G2.

Transporte radiativo. Supongamos que tenemos una nube de gas y detrás de ella hay una fuente luminosa cuya intensidad a la frecuencia ν es I_{ν} .

El cambio de intensidad que experimenta la luz al recorrer una distancia, ds ,

dentro de la nube de gas (ver Figura A.4) está dado por

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu + j_\nu, \quad (\text{A.9})$$

donde κ_ν y j_ν son el coeficiente de absorción y emisión de la nube a la frecuencia ν . Definiendo la profundidad óptica τ_ν como $d\tau_\nu = \kappa_\nu ds$, entonces podemos escribir la ecuación (A.9) como:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu, \quad (\text{A.10})$$

donde $S_\nu = j_\nu/\kappa_\nu$ es la llamada función fuente. Una solución de la ecuación (A.10) es

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu-t)} S_\nu(t) dt,$$

donde $I_\nu(0)$ es la intensidad que viene por detrás de la nube y pasa a través de ella y el segundo término representa la emisión de la nube de gas.

Traslación, Movimiento. Son movimientos directos que mantienen la forma y el tamaño de los objetos. El movimiento de translación de la Tierra, alrededor del Sol, tiene una duración de un año con una velocidad de 106 000 *km/h*.

Unidad Astronómica (UA). Es la distancia promedio entre el Sol y la Tierra. $1UA \approx 150\,000\,000$ *km*. La UA es una unidad de longitud muy usada en Astronomía.

Velocidad angular. Magnitud vectorial que caracteriza la variación del ángulo recorrido por un objeto en movimiento que describe una trayectoria circular o de un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo. Se representa por ω y su unidad es el *rad/s*.

Vertical. La vertical de una estrella es el **círculo mayor** que pasa por dicha estrella y por el cenit del lugar donde está el observador.

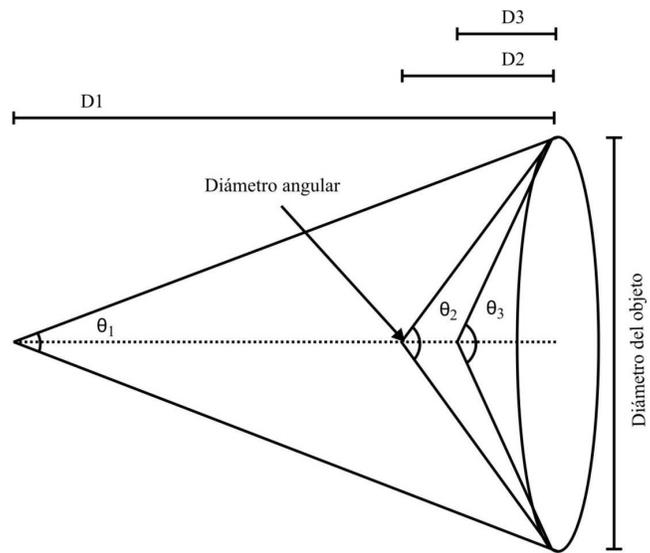


Figura A.1: Diámetro angular.

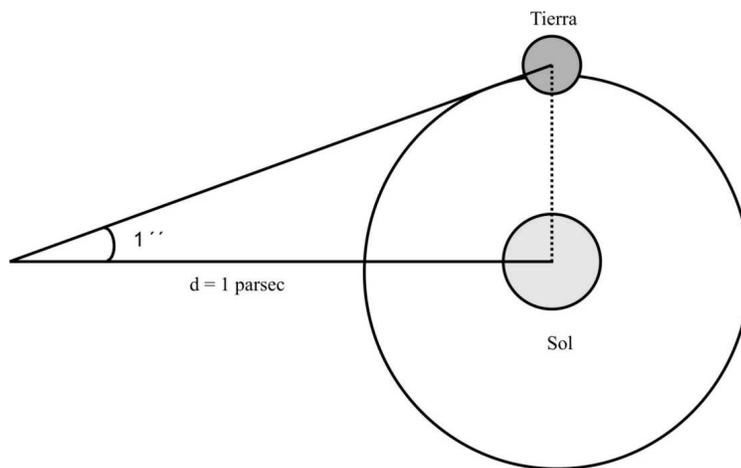


Figura A.2: Representación gráfica de un parsec.

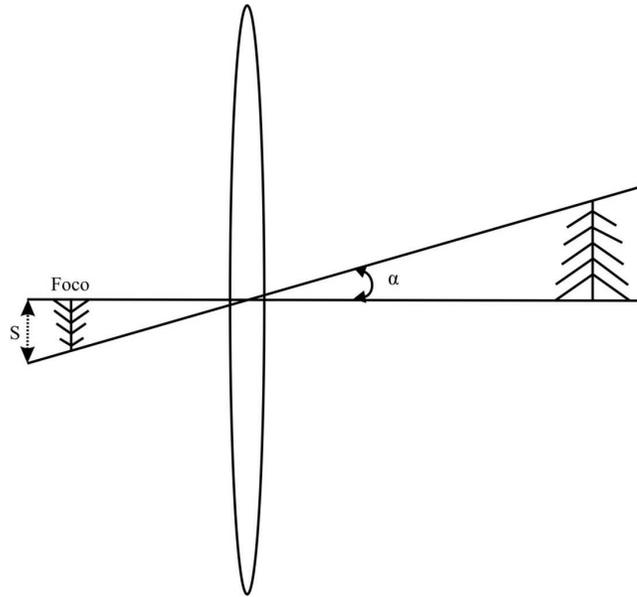


Figura A.3: La imagen del objeto tiene un tamaño s en la placa fotográfica.

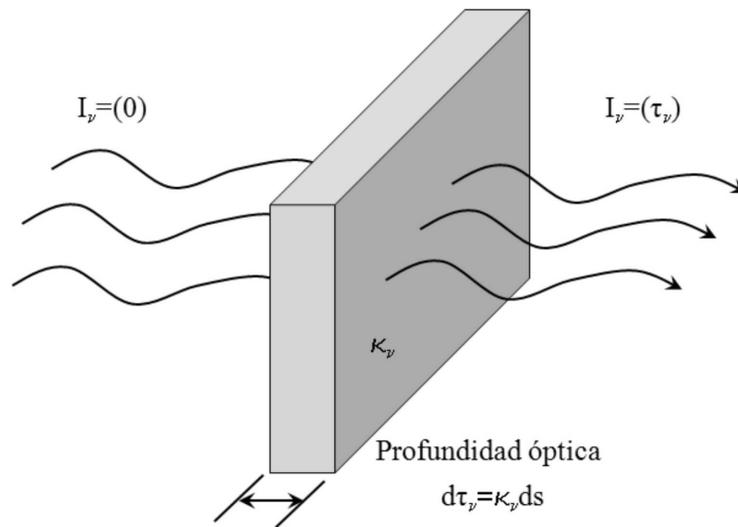


Figura A.4: Intensidad de radiación en la entrada y en la salida de un elemento de volumen de una nube de gas.

Índice alfabético

- Ángulo subtendido, **6, 10, 16, 17, 95, 107, 128**
Átomo, **118**
- Año luz, **128**
Absorción, **128**
Acimut, **128**
Acreción, **66, 128**
Afelio, **17, 64, 77, 80, 128**
Asensión recta, **128**
Asteroide, **66, 128**
Atmósfera, **129**
- Círculo horario, **129**
Círculo mayor, **129**
Círculo menor, **129**
Cúmulo globular, **129**
CCD, **129**
Cenit, **7, 27, 129**
Cometa, **61, 80, 129**
Culminación, **19, 21, 27, 130**
Curva de rotación, **130**
- Día sidereal, **130**
Día solar, **130**
Declinación, **27, 130**
Densidad de flujo, **83, 86, 93, 94, 107, 108, 110, 133**
Diámetro angular, **6, 15, 26, 130**
Diagrama Hertzsprung-Russell, **130**
Dispersión, **131**
- Eclíptica, **26, 131**
Eclipse, **10, 16, 42, 43, 131**
Ecuador, **56, 131**
Efecto Doppler, **121, 131**
Eje polar, **26, 132**
Electrón, **132**
Energía cinética, **132**
Energía potencial, **132**
Energía térmica, **132**
Escala de altura, **34, 43, 132**
Escala de placa, **29, 132**
Esfera celeste, **133**
Espectro, **133**
Estrella, **1, 2, 11, 27, 66, 68, 69, 81, 83, 87, 91, 93, 99, 101, 103, 108, 110, 117, 118, 125, 133**
Estrella binaria, **91, 133**
Estrella de neutrones, **68, 69, 103, 133**
- Flujo, **133**
Flujo total, **134**
Fotón, **134**
Fotósfera, **47**
- Galaxia, **68, 120, 134**
- Horizonte, **12, 25, 134**
Hoyo negro, **68**
- Intensidad, **112**
- Línea del H neutro, **121**

- Línea de visión, **136**
 Línea espectral, **136**
 Latitud, **21, 25, 71**
 Latitud geográfica, **14, 27, 47, 134**
 Ley de los cosenos, **134**
 Leyes de Kepler, **14, 66, 69, 134**
 Leyes de Newton, **135**
 Lluvia de estrellas, **136**
 Longitud galáctica, **122, 136**
 Longitud geográfica, **14, 47**
 LSR, **122**
 Luminosidad, **81, 87, 97, 101, 103, 106, 110, 136**

 Magnitud, **83, 86, 91, 99, 136**
 Magnitud absoluta, **93, 95, 108, 136**
 Magnitud aparente, **83, 86, 91, 92, 94, 95, 136**
 Materia oscura, **136**
 Medio interestelar, **119, 137**
 Meridiano, **137**
 Meteorito, **137**
 Molécula, **137**
 Momento de inercia, **137**

 Nadir, **137**
 Nebulosa planetaria, **138**
 Nubes moleculares, **138**
 Nutación, **138**

 Parábola, **31**
 Paralelo, **138**
 Parsec, **138**
 Período sinódico, **26**
 Período sidéreo, **138**
 Período sinódico, **26, 138**
 Perihelio, **77, 80, 138**
 Peso, **138**
 Planeta, **139**
 Plano de la eclíptica, **139**
 Plano ecuatorial, **139**
 Plano horizontal, **139**
 Polo, **139**
 Polvo, **66**
 Polvo interestelar, **139**
 Precesión, **139**
 Protón, **139**
 Pulsar, **105, 139**
 Punto vernal, **140**

 Rayos X, **105**
 Región HII, **119, 140**
 Remanente de supernova, **117, 140**
 Resolución angular, **32, 140**
 Rotación, **132, 140**

 Solsticio, **2, 7, 140**
 Supernova, **108, 117, 140**

 Telescopio, **141**
 Temperatura de brillo, **141**
 Temperatura efectiva, **88, 94, 95, 97, 103, 105, 107, 110, 141**
 Tipo espectral, **141**
 Transporte radiativo, **112, 141**
 Traslación, **142**

 Unidad astronómica, **14, 142**

 Velocidad angular, **142**
 Vertical, **142**
 Viento solar, **48**